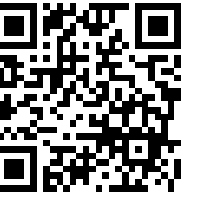
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

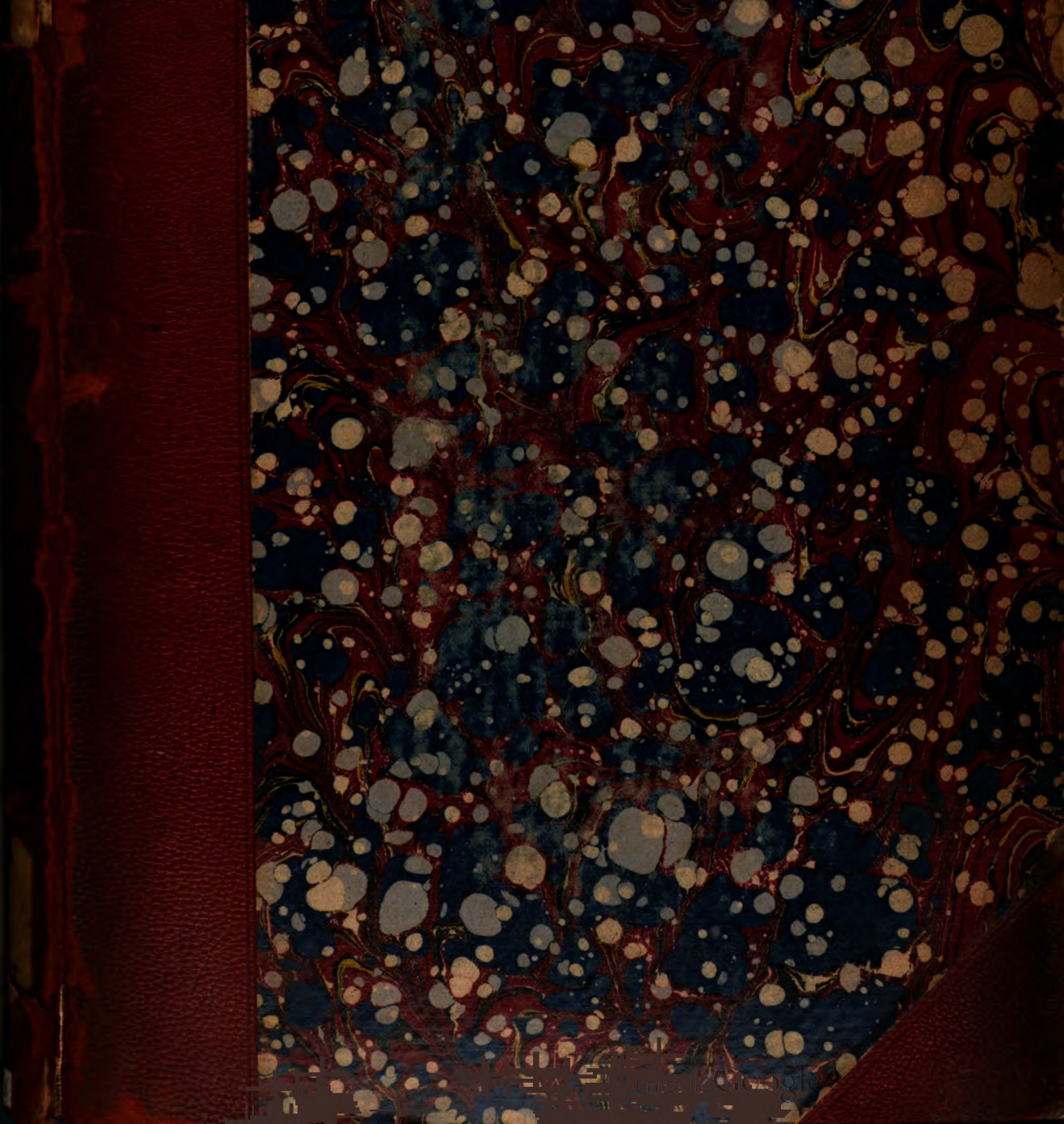
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`


Digitized by Google

20

Class 7Ma4 Book

University of Chicago Libraries

GIVEN BY

Besides the main topic this book also treats of

Subject No.	On page	Subject No.	On page

Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

THE UNIVERSITY OF CHICAGO LIBRARY

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA

ANNO X.
1907

TORINO
CARLO CLAUSEN (HANS RINCK Succ.)
Libraio delle LL. MM. il Re e la Regina.

1908.

Digitized by Google

THE
UNIVERSITY
OF
CHICAGO LIBRARY

Digitized by Google

366167

INDICE

A. Garbasso. Problemi della scienza, p. 33-37.

G. Vailati. La scoperta della condizione d'equilibrio d'un grave scorrevole lungo un piano inclinato, p. 65-72.

RECENSIONI ED ANNUNZI.

Picard et Simart. Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendentes, (F. Severi) p. 1-10. — **Pokels.** Lehrbuch der Kristallostik (P. A. Cassinis), p. 11-14. — **Panebianco.** Trattato di cristallografia morfologica (P. A. Cassinis), p. 14-16. — **Sobotka.** Deskriptivni geometrie (G. L.), p. 16-18. — **Vivanti-Gutzmer.** Theorie der eindentigen analylischen Functionen (C. Severi), p. 19-30. — **Vivanti.** Funzioni poliedriche e modulari (G. Fubini), p. 20-22. — **Hudson.** Kummer's quartic surfaces (G. L.), p. 22-23. — **Gleichen.** Photographische Optik (R. Marcolongo), p. 23-25. — **Young.** The theory of sets of points (G. Vivanti), p. 25-26. — **J. Tannery.** Leçons d'algébre et d'analyse, p. 22-28. — **Bertini.** Geometria proiettiva degli iperspazi (L. Berzolari), p. 37-51. — **Appell.** Cours de mécanique (R. Marcolongo), p. 51. — **Blasche.** Matematische Statistik (E. Czuber), p. 52-54. — **Laurent.** La géométrie analytique générale (G. L.), p. 54-55. — Annuaire pour l'an 1907 (G. L.). — **Mandart.** Trigonométrie rectiligne et spherique (G. L.), p. 56. — **Lesser.** Die Infinitesimalrechung im Unterrichte der Prima (G. L.), p. 56-57. — **Pincherle.** Algebra complementare, Parte I (U. Amaldi), p. 57-58. — **Levi.** Sul principio di Dirichlet (G. Fubini), p. 73-76. — **Weber-Wellstein.** Encyclopädie der Elementarmathematik, II (U. Amaldi), p. 76-79. — **Berry-Gambioli.** Storia dell'Astronomia (G. L.), p. 79-80. **Helmert.** Die Ausgleichungsechnung (P. Pizzetti), p. 80-88. — **Ebner.** Leifaden der technisch wichtigen Kurven, p. 88-89 (G. L.). — **Gauss.** Werke VII (G. L.), p. 89-90. — **G. Loria.** Darstellende Geometrie, I (U. Amaldi), p. 90-93. — **Wilczynski.** Projective differential Geometrie (U. Amaldi), p. 93-95. — **Czuber.** Differential und Integralrechnung (G. Vivanti), II, p. 45. — **Fields.** Algebraic functions of a complexe variable (G. Vivanti), p. 95-95. — **Osgood.** Funktionen theorie II, 1 (G. Vivanti), p. 96-97. — **Maillet.** Introduction à le théorie des nombre trascendents (G. Vivanti), p. 97-48. — **Nielsen.** Integrallegarithuns (G. Vivanti), p. 98-99. — **Ortu Carboni.** Matematica finanziaria (Burali-Forti), p. 99-101. — **Volterra.** Équations differentielles (G. Fubini), p. 101-102. — **Veblen and Lennes.** Infinitesimal Analysis (G. Fubini). — **Chandler.** Infinitesimal calculus (G. Fubini).

PROGRAMMI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARI.

E. Pascal. Programmi delle lezioni di Analisi superiore tenute all'Università di Pavia nell'anno scolastico 1906-07, p. 103-106.

G. Fubini. Programma delle lezioni di Analisi superiore tenute all'Università di Genova nell'anno scolastico 1906-07, p. 106.

NECROLOGIO.

R. Marcolongo. Brevi cenni sulla vita e sulle opere di Francesco Siacci, p. 107-116.

Digitized by Google

5966.

NOTIZIE.

Onoranze ad U. Dini. — Lo sviluppo del simbolismo algebrico. — Matematica ed Esperanto. — Rivista di scienza. — Biblioteca scolastica. — Sussidi di bibliografici per le ricerche scientifiche. — Tema proposto dal Politecnico di Darmstadt. — Die Kultur der Gegenwart. — Nuovi modelli matematici, p. 28-32.

I premi dell'Istituto di Francia. — A. Mannheim. — Tema proposto dall'Accademia di Danimarca. — Tema posto a concorso dalla Società di Haarlem. — Tema di concorso proposto dall'Accademia di Napoli. — Matematica ed Esperanto. — Pubblicazioni recenti sulla storia delle Scienze esatte. — Centenario di E. Torricelli. — Gustavo Bauer. — Dalla pittura alla fotografia, p. 59-64.

C. G. A. Mayer. — Una nuova collezione di manuali scientifici. — Che cosa è la matematica? — Monumento ad Abel. — Rivista di scienza. — Per la storia della geometria intrinseca. — Un lavoro fondamentale nella teoria delle equazioni di 5° grado. — Schizzo della storia delle matematiche del Belgio. — Per l'unificazioni delle notazioni vettoriali. — Un nuovo periodico di matematica applicata. — Pubblicazioni recenti sulla storia delle scienze matematiche. — Lo sviluppo della prospettiva pittorica. — Temi proposti dall'Accademia del Belgio. — Una nuova biografia di Salmon. — L'ultimo teorema di Fermat. — Tema proposto dall'Accademia di Madrid. — Uno sguardo al nuovo indirizzo logico matematico delle scienze deduttive. — Abh. zur Geschichte der Mathematik. — Berichte aus Ungarn. — Annuarire pour l'an 1908. — Pubblicazioni recenti sulla storia delle scienze naturali. — Intern. Ass. for the study of quaternions. — Tema proposto dall'Acc. Jablonowshi. — Un'esposizione permanente di modelli. — Nuovo catalogo. — Biblioteca scolastica, pag. 117-124.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

ANNO X. — **Gennaio, Febbraio e Marzo** — 1907.

RECENSIONI ed ANNUNZI.

PICARD E. et G. SIMART — *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.* Paris, Gauthier-Villars, 1897-1906, 2 vol., [Prezzo L. 27].

Quest'opera, di cui è uscito l'ultimo fascicolo lo scorso anno, e ormai così conosciuta, che sarebbe fuor di luogo presentare oggi, in un quadro analitico, gli argomenti in essa trattati. Mi limiterò pertanto a spigolare qua e là, traendo dalle parti più belle e più originali del libro.

Una tra le geniali concezioni del Picard concerne gl'integrali di differenziali totali appartenenti ad una superficie algebrica. Clebsch e Noether intorno al '68 avevano esteso il concetto d'integrale abeliano, introducendo nel campo delle funzioni algebriche di due variabili, gl'integrali doppi o integrali d'area. Picard nell'84 estese in un altro senso la nozione d'integrale abeliano, definendo sopra una superficie algebrica, gl'integrali di differenziali totali o integrali curvilinei.

S'immagini la varietà riemanniana a 4 dimensioni V i cui punti reali rappresentano le soluzioni complesse dell'equazione algebrica d'ordine m

$$f(x\,y\,z) = 0,$$

e si fissi in V un cammino curvilineo qualunque σ, che vada dal punto $(x_0\ y_0\ z_0)$ al punto $(x_1\ y_1\ z_1)$.

Sieno P, Q due funzioni razionali di $(x\,y\,z)$ soddisfacenti *nei punti di* V alla condizione d'integrabilità

$$\frac{d\,P}{d\,y} = \frac{d\,Q}{d\,x}.$$

Allora

$$\int_\sigma P\,dx + Q\,dy$$

Digitized by Google

ha un valore I che non s'altera quando si tengon fissi gli estremi d'integrazione e si assoggetta σ ad una deformazione continua. Tenendo fisso $(x_0\ y_0\ z_0)$ e facendo variare il punto $(x_1\ y_1\ z_1)$, si definisce in tal modo una funzione (generalmente polidroma) I $(x_1\ y_1\ z_1)$ del punto $(x_1\ y_1\ z_1)$ variabile sulla V. Questa funzione dicesi un *integrale di differenziale totale* appartenente alla superficie $f = o$.

Il valore dell'integrale esteso ad un cammino chiuso (ciclo lineare) della V è un *periodo* di I. La polidromia della funzione I consiste appunto in ciò: che i suoi valori in un punto qualunque di V differiscono tra loro per combinazioni lineari a coefficienti interi, formate con un numero finito di periodi scelti in modo conveniente (sistema primitivo di periodi).

La funzione I dicesi un *integrale di 1ª specie* se è finita in tutti i punti di V; *di 2ª specie* se presenta al più singolarità polari; *di 3ª specie* se presenta anche singolarità logaritmiche. Altre specie di singolarità non sono possibili, per la natura delle funzioni integrande P, Q.

Queste definizioni sono evidentemente invarianti rispetto alle trasformazioni birazionali della superficie.

Ed ecco ora come procede il Picard per costruire gl'integrali semplici di 2ª specie appartenenti alla superficie f (la quale, trattandosi di proprietà invarianti per trasformazioni birazionali, si suppone dotata di singolarità ordinarie).

Sia

$$(1) \qquad \int R(x\,y\,z)\,dx$$

(R funzione razionale di x, y, z) un integrale abeliano avente soltanto singolarità polari sopra una sezione generica di f con un piano y=cost. — Il genere di questa sezione sia p.

Entro alla curva sezione — cioè entro alla superficie di Riemann che ne è l'immagine reale — si fissino $2p$ cicli lineari indipendenti $C_1\ C_2 \ldots C_{2p}$ (p. e. le p coppie di cicli che costituiscono le retrosezioni riemanniane) e dicansi $\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_{2p}$ i periodi dell'integrale (1) lungo questi cicli. Al variare della sezione piana considerata, cioè al variare del parametro y, si deformano i cicli $C_1\ C_2 \ldots C_{2p}$ e i periodi relativi risultano funzioni di y soddisfacenti ad un'equazione differenziale lineare E, d'ordine , a $2p$ coefficienti razionali e appartenente alla classe delle equazioni di Fuchs a punti singolari regolari.

I punti critici dell'equazione E sono i valori di y per cui il genere della relativa sezione si abbassa, e corrispondono perciò ai piani del fascio $y =$ cost. tangenti alla superficie f. Sia b uno di questi valori particolari di y.

Digitized by Google

Si possono scegliere i cicli $C_1 C_2 \dots C_{2p}$ in guisa che nell'intorno del punto critico b gl'integrali $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{2p-1}$ dell'equazione E sieno olomorfi, mentre l'integrale rimanente sia del tipo

$$\omega_{2p}(y) = \Theta(y) + \frac{1}{2\pi i}\,\omega_{2p-1}(y)\,log(y-b).$$

L'equazione determinante relativa al punto b, ha una radice doppia, e i due integrali ω_{2p-1}, ω_{2p} provengono da questa radice.

Ciò corrisponde al fatto che il nuovo punto doppio acquistato dalla curva sezione, è generalmente un punto di singolarità logaritmica per l'integrale (1).

Le sostituzioni elementari del gruppo G dell'equazione E, si ottengono girando attorno ai punti critici suddetti e risultano dunque sostituzioni lineari a coefficienti interi.

Del resto ciò è evidente a priori, quando si pensi che una circolazione di y scambia un ciclo della curva $y = \bar{y}$ con un ciclo della stessa curva, e che, d'altra parte, tutti i cicli di questa sezione sono esprimibili mediante combinazioni lineari a coefficienti interi dei $2p$ cicli $C_1 C_2 \dots C_{2p}$. Anzi quest'osservazione prova che *le sostituzioni lineari formanti il gruppo di* E *sono indipendenti dalla scelta dell'integrale* (1). mentre è chiaro che i coefficienti di E dipendono dalla scelta della funzione R.

Se l'equazione E è irriducibile, una circolazione conveniente di y scambia un integrale ω con ogni altro, e quindi tutti i cicli di f possono ridursi ad uno di essi. In tal caso un ciclo lineare qualunque della varietà V può ridursi ad un punto per deformazione continua. Un integrale di differenziale totale di 1ª o di 2ª specie appartenente ad f, avrà tutti i suoi periodi nulli (perchè relativi a cicli riducibili a punti) e quindi sarà una costante, se di 1ª specie, o una funzione razionale, se di 2ª specie. Questo deve considerarsi come il caso generale, allorquando si assegnino ad arbitrio i coefficienti di f.

Quando invece l'equazione E è riducibile, esistono infiniti gruppi di $2p$ numeri $P_1 P_2 \dots P_{2p}$, non tutti nulli, che restano invarianti per le sostituzioni del gruppo G. Fissati allora sulla curva $f(x\,y\,z) = 0$ (y parametro) $2p$ integrali di 2ª specie distinti

$$\int R_i\,(x\,y\,z\,dx \qquad (i = 1, 2, \dots, 2p)$$

si posson determinare $2p$ funzioni razionali di y, $a_1 a_2 \dots a_{2p}$, in tal guisa che

$$\int \Sigma\, a_i\, R_i\, d\,x$$

Digitized by Google

abbia i suoi periodi indipendenti da y, e precisamente uguali ad un gruppo di costanti (non tutte nulle) $P_1 P_2 \dots P_{2p}$, soddisfacenti alle equazioni di G. Posto $A = \Sigma\, a_i\, R_i$, si determina allora facilmente una nuova funzione razionale B tale che nei punti di f risulti

$$\frac{d\,A}{d\,y} = \frac{d\,B}{d\,x},$$

e si costruisce quindi un integrale semplice di 2ª specie

$$\int A\,d\,x + B\,d\,y$$

che ha i periodi $P_1 P_2 \dots P_{2p}$ lungo i cicli $C_1 C_2 \dots C_{2p}$. Ne deriva che, se le equazioni del gruppo G lasciano arbitrarie r delle P, tanti sono i periodi di un integrale di 2ª specie assegnabili ad arbitrio, e tanti sono i cicli lineari, tra di loro *indipendenti*, che si possono tracciare sulla varietà V.

Si ha così il risultato fondamentale ottenuto dal Picard nelle memorie più antiche, che cioè *gl'integrali semplici di 2ª specie appartenenti ad una superficie algebrica sono tanti quanti i loro periodi.*

Si può approfondire ulteriormente la riducibilità dell'equazione E: è ciò che ha fatto il Picard alla fine del 1904 dimostrando che *l'equazione* E *è soddisfatta da* r *polinomî linearmente indipendenti.* La dimostrazione di questa notevole proprietà si ottiene semplicemente partendo dal fatto che un sistema di p retrosezioni fissate sopra una curva $y =$ cost si muta, dopo una circolazione arbitraria di y, in un sistema di retrosezioni.

Liberata l'equazione E dagli r integrali suddetti, si ottiene un'equazione irriducibile E_0, della stessa natura di E, ma d'ordine $2p-r$.

Queste proprietà sono suscettibili di una suggestiva interpretazione di ***analysis situs.***

Sulla sezione $f(x\,y\,z) = 0$ (y parametro) si posson fissare r cicli indipendenti, che non si modificano per una circolazione di y: sono i cicli lungo cui i periodi riduconsi a polinomi in y. Sulla stessa curva si possono fissare ulteriormente $2p-r$ cicli, distinti tra loro, lungo i quali si hanno come periodi $2p-r$ integrali indipendenti della equazione E_0. La irriducibilità di questa equazione porta come conseguenza che questi ultimi $2p-r$ cicli si riducono tutti ad uno di essi e in particolare ad un ciclo nullo. Lungo questi ultimi cicli gl'integrali semplici di 2ª specie della superficie hanno dunque periodi nulli.

Dalla proposizione sugli r polinomi integrali di E, il Picard deduce il teorema ch'io stabilii prima, seguendo una via affatto diversa: Una superficie regolare — avente cioè i generi superficiali p_g, p_a uguali tra loro — non possiede integrali trascendenti di 2ª specie.

Digitized by Google

Questo teorema è stato completato in modo esauriente da altre ricerche posteriori di Enriques, di Castelnuovo e mie, le quali hanno portato al seguente risultato complessivo: *Una superficie di generi* p_g, p_a *possiede* $p_g - p_a$ *integrali semplici di 1ª specie e* $2(p_g - p_a)$ *integrali semplici di 2ª specie*; cioè il numero sopra indicato con r è uguale a $2(p_g - p_a)$.

Nell'ultima parte del trattato gli Autori si occupano di questo teorema, ma per ottenerne la dimostrazione seguendo il metodo di Picard, cioè coll'uso della solita equazione differenziale, occorrerebbe colmare due lacune, che del resto vengono segnalate in modo esplicito alle pagine 432, 434 del IIº volume.

*
* *

Un altro risultato fondamentale, riprodotto nell'opera di cui parliamo, è quello relativo agl'integrali di differenziali totali di 3ª specie.

Un integrale di 3ª specie ha i suoi punti di singolarità logaritmica distribuiti lungo due o più curve algebriche della superficie f. Il valore dell'integrale lungo un ciclo che sia riducibile ad un punto senza traversare queste curve, è nullo. Invece lungo un ciclo infinitamente piccolo che avvolga un punto di una curva logaritmica, l'integrale ha un valore diverso da zero, che si chiama il *periodo polare* relativo a quel punto, o meglio a quella curva, perché — in forza della condizione d'integrabilità — il periodo è lo stesso per tutti i punti della curva.

Orbene, il Picard dimostra che *se si assegnano comunque sopra una superficie algebrica alcune curve algebriche irriducibili, appena il loro numero superi un conveniente intero fisso* ρ, *si può costruire un integrale semplice di 3ª specie avente singolarità logaritmiche* SOLTANTO *lungo quelle curve.*

Io ho mostrato recentemente il legame tra questa notevolissima proposizione e la teoria delle curve tracciate sôpra una superficie algebrica; anzi la proposizione stessa mi ha servito a costruire la *base* per la totalità delle curve algebriche appartenenti alla superficie (*). E alla sua volta il risultato sulla base mi ha permesso di completare il teorema di Picard, rispondendo ad una questione importante, che s'incontra più volte nel trattato (vedi p. e. a pag. 244 del IIº vol.).

Ho infatti dimostrato che *gl'integrali semplici di 3ª specie di una*

(*) Ved. la mia Memoria nei *Mathematische Annalen* Bd. 62 (1906). Da poco sono riuscito a costruire sopra una superficie la *base minima*, cioè un gruppo di un numero finito di curve da cui deduconsi tutte le curve della superficie con operazioni di somma e sottrazione. Pubblicherò presto la dimostrazione di questo risultato.

Digitized by Google

superficie riduconsi a somme di funzioni razionali e di logaritmi di funzioni razionali, solo quando la superficie è regolare (*).

*
* *

Troppo lungamente dovrei intrattenere il lettore se volessi fermarmi sopra tutti i risultati degni d'attenzione e di studio, che s'incontrano nel trattato ad ogni piè sospinto; ma mancherei certamente allo scopo che mi sono proposto di porre in rilievo i risultati più essenziali, se tacessi della teoria degl'integrali doppi di 2ª specie, cui il Picard ha portato così notevoli contributi.

Anzitutto riassumo la definizione d'integrale doppio di 2ª specie. Sia

$$(2) \qquad \iint R\,(x\,y\,z)\,dx\,dy,$$

ove R è una funzione razionale del punto $(x\,y\,z)$ variabile sulla f (o meglio sulla varietà riemanniana V), un integrale doppio appartenente alla superficie f. Si dice che in un punto A della superficie l'integrale (2) ***ha il carattere d'un integrale di 2ª specie***, quando si posson trovare due funzioni razionali M, N (dipendenti dalla posizione di A) tali che sia finito

$$\iint \left(R - \frac{d\,M}{d\,x} - \frac{d\,N}{d\,y}\right) dx\,dy$$

esteso ad una *qualunque* area che contenga A ed appartenga all'intorno di questo punto (entro alla riemanniana V) (**).

Un integrale doppio dicesi di 2ª specie, quando in ogni punto ha il carattere suddetto. Questa definizione si può ravvicinare alla definizione più usata degli integrali abeliani di 2ª specie. La singolarità polare di un integrale abeliano in un punto dato, sparisce infatti sottraendo una conveniente funzione razionale, che è poi un integrale abeliano di forma speciale.

Tra gl'integrali doppi di 2ª specie si trovano in particolare gl'integrali doppi di 1ª specie (integrali finiti per ogni area - finita - di integrazione), considerati da Clebsch e Noether.

Si sa che un integrale abeliano di 2ª specie sopra una superficie di Riemann, si può anche definire come un integrale abeliano che ha

(*) Ibidem, § 5.

(**) Se A fosse un punto multiplo di f (doppio o triplo), invece di un solo intorno se ne dovrebbero considerare tanti quante sono le falde della superficie che s'incrociano in A. Ciò del resto è reso naturale dal fatto che un punto doppio o triplo è rappresentato da due o tre punti distinti della varietà V.

Digitized by Google

tutti i residui nulli, cioè che ha valore nullo lungo tutti i cicli riducibili a punti. Orbene, anche questa definizione ha la sua analoga nella teoria degl'integrali doppi.

Occorre prima dimostrare con Poincaré che *il valore d'un integrale doppio del tipo* (2) *non s'altera lasciando fermo il contorno dell'area d'integrazione e deformando questa continuità, purchè, beninteso, nella deformazione non s'incontrino punti in cui* R *divenga infinita o indeterminata.*

Cosicchè il valore dell'integrale (2) sopra una superficie *chiusa* che si possa ridurre ad una linea o ad un punto senza traversare valori singolari di R, è nullo.

Se una superficie chiusa, riducibile ad una linea o ad un punto, circonda un punto singolare di R, in tal guisa che la riducibilità della superficie non possa ottenersi senza traversare il punto singolare, il valore dell'integrale doppio esteso a questa superficie è in generale diverso da zero, e si chiama, con Poincaré, il *residuo dell'integrale doppio* relativo a quel punto.

Un integrale doppio è di 2ª specie quando tutti i suoi residui son nulli.

Tale definizione è invariante in senso assoluto nelle trasformazioni birazionali della superficie *f*.

Un primo risultato importante è che se non si considerano come *distinti* due integrali di 2ª specie che differiscano per un integrale doppio del tipo

$$(3) \qquad \iint \left(\frac{d\,A}{d\,x} + \frac{d\,B}{d\,y} \right) d\,x\,d\,y \quad \text{(A, B funz. razionali)},$$

vi è un numero limitato ρ_0 *d'integrali doppi distinti di 2ª specie, tra loro linearmente indipendenti.*

Ma la questione di valutare il numero ρ_0 è una questione di carattere aritmetico assai difficile.

Poichè ogni integrale (2) per sottrazione di integrali del tipo (3), può ricondursi al tipo

$$(4) \qquad \iint \frac{P(x\,y\,z)}{f'_z}\,d\,x\,d\,y,$$

ove P è un polinomio aggiunto ad *f* (di grado limitato), così il problema di contare gl'integrali doppi di 2ª specie, riducesi al problema di riconoscere sotto quali condizioni una funzione razionale del tipo $\frac{P}{f'_z}$ può porsi nei punti di *f* sotto la forma

$$\frac{d\,A}{d\,x} + \frac{d\,B}{d\,y}.$$

Digitized by Google

Si dimostra che quest'ultimo problema è senz'altro risoluto allorquando si conosca una *base* per la totalità delle curve algebriche appartenenti alla superficie. Tale risultato pone uno stretto legame tra il numero ρ_0 ed il numero-base ρ.

Un integrale doppio del tipo (4), ove P sia ora un polinomio aggiunto qualunque, ha evidentemente residui nulli in tutti i punti al finito di f. Se si vuole ch'esso risulti di 2ª specie, occorre dunque fissare soltanto il suo comportamento nei punti all'infinito. Supposto che la f abbia le sezioni piane di genere p e possegga r integrali semplici distinti di 2ª specie, basta *scrivere* $2p-r$ *condizioni algebriche generalmente distinte tra i coefficienti del polinomio aggiunto* P, *per esprimere che un integrale del tipo* (4) *è di* 2ª *specie.*

In tutta questa ricerca giuoca un'equazione differenziale lineare E′, analoga ad E, ma di ordine $2p + m - 1$: è l'equazione cui soddisfano i $2p$ periodi ciclici e gli m periodi polari (che riduconsi ad $m-1$ distinti) dell'integrale abeliano

$$\int \frac{P(xyz)}{f'_z}\, dx \qquad (y \text{ parametro}),$$

nei punti all'infinito della curva $f(xyz) = 0$.

***

Per *periodo d'un integrale doppio* s'intende il valore dell'integrale quando si assuma come superficie d'integrazione un ciclo a due dimensioni della f (o meglio della riemanniana V), cioè il valore dell'integrale sopra una superficie *chiusa* contenuta in V.

Un divario profondo havvi tra la teoria dei cicli lineari e la teoria dei cicli a due dimensioni: i primi non esistono (tranne quelli riducibili a punti) sopra una superficie $f(xyz) = 0$ priva di singolarità, mentre sopra una tal superficie esistono sempre cicli a due dimensioni non riducibili a linee o a punti. La presenza delle singolarità tende anzi a diminuire il numero dei cicli distinti a 2 dimensioni.

Una costruzione molto importante dei cicli a due dimensioni è la seguente: Si immagini tracciato un ciclo lineare Γ sulla curva $f(xyz) = 0$ (y parametro) e si supponga che per un certo ciclo C descritto dalla variabile y sul piano complesso ove essa è distesa, Γ si deformi ritornando infine alla posizione iniziale. Si genera in tal modo un ciclo a due dimensioni (superficie chiusa). Qual'è il periodo dell'integrale doppio (4) — non necessariamente di 2ª specie — relativo a un tal ciclo?

Digitized by Google

Scindendo l'integrazione doppia in due integrazioni semplici, risulta evidente che il periodo richiesto è

$$\int_C \omega(y)\, dy,$$

$\omega(y)$ essendo il periodo dell'integrale abeliano

$$(5) \qquad \int \frac{P(xyz)}{f'_z}\, dx$$

lungo il ciclo F.

Suppongasi la f dotata di singolarità ordinarie e disposta genericamente rispetto agli assi. Consideriamo ancora l'equazione differenziale E), d'ordine $2p + m - 1$, relativa all'integrale (5).

Si vede, in primo luogo, che il punto $y = \infty$ non è critico per l'equazione E', chè anzi questa viene ad avere gli stessi punti critici $b_1\ b_2 \ldots b_N$ dell'equazione lineare E, più volte considerata (i piani $y = b_i$ essendo tangenti ad f). L'equazione E' comportasi intorno ad un punto critico b_i proprio come la E.

Sia $\Omega_i(y)$ il periodo di (5) lungo il ciclo circondante i due punti di diramazione, che, col tendere di y a b_i, tendono al punto di contatto. Segnati sul piano della variabile y i punti $b_1\ b_2 \ldots b_N$ e fissata un'origine a pei cappii (*lacets*), la funzione $\Omega_i(y)$ risulta perfettamente definita lungo il cappio $a\ b_i$. Quando y descrive un ciclo lineare C il periodo $\omega(y)$ relativo al ciclo Γ, aumenta d'un'espressione del tipo $\Sigma\, m_i\, \Omega_i(y)$; sicchè, se si vuole che Γ ritorni in sè a circolazione eseguita, cioè che generi un ciclo a due dimensioni Δ, dovrà essere

$$(6) \qquad \Sigma\, m_i\, \Omega_i(y) = 0 \qquad (m_i \text{ interi}).$$

Un facile calcolo dà inoltre

$$(7) \qquad \iint_\Delta \frac{P(xyz)}{f'_z}\, dx\, dy = \int \omega(y)\, dy = \Sigma\, m_i \int_a^{} \Omega_i(y)\, dy.$$

Dunque un periodo dell'integrale (4) sopra un ciclo del tipo Δ, si esprime sotto la forma (7) colla condizione (6), la quale rende l'ultima somma d'integrali indipendente dall'origine a.

Viceversa, Picard dimostra che ogni ciclo *situato tutto al finito* è generabile nel modo accennato, sicchè insomma i periodi dell'integrale (4) relativi a cicli al finito, son tutti del tipo (7).

Questo importante risultato dà il mezzo di contare quanti sono questi periodi, giacchè si tratta in sostanza di contare quante sono le relazioni distinte del tipo (6). Si trova che tra le Ω ve ne sono

Digitized by Google

soltanto $2p + m - 1 - r$ lineamente indipendenti, e se ne deduce che *i periodi distinti (assegnabili ad arbitrio) dell'integrale* (4) — *ove* P *è un polinomio aggiunto arbitario — relativi a cicli situati al finito, sono in numero di*

$$N - (2p + m - 1 - r).$$

Tra questi periodi $2p - r$ (distinti) sono i residui dell'integrale doppio nei punti all'infinito di f. *Quando l'integrale* (4) *è di seconda specie* questi residui son nulli e quindi *i periodi distinti (relativi a cicli al finito) riduconsi a* $N - 4p + 2r - m + 1$.

Assegnando ad arbitrio questi periodi si costruisce un integrale doppio di 2ª specie corrispondente, ma tale integrale può anche essere del tipo (3). Volendo escludere gl'integrali di questo tipo dal conto del numero degl'integrali distinti, si viene a diminuire il numero delle arbitrarie di $\rho - 1$, ρ essendo il numero-base di f. e si trova così la formola fondamentale di Picard

$$p_0 = N - 4p - m + 1 + 2r - (\rho - 1).$$

Introducendo l'invariante $I = N - 4p - m$ di Zeuthen-Segre e l'irregolarità $p_g - p_a = \frac{1}{2} r$ di f, si ha la relazione sotto la forma invariantiva

$$p_0 = I + 4(p_g - p_a) - \rho + 2.$$

Questa relazione condurrà indubbiamente a nuove e fertili ricerche nell'inesauribile campo delle funzioni algebriche di due variabili.

FRANCESCO SEVERI.

Nota. L'invariante $I + 1 + 2r$ dà il numero dei cicli distinti a due dimensioni situati al finito. Considerando proiettivamente i punti all'infinito della superficie (riguardando cioè come coincidenti due punti che corrispondano a uguali direzioni) la varietà V immagine di f risulta una varietà chiusa (bilatera). La varietà cui riferiscesi il Picard si ottiene da questa dandole come contorno (*frontière*) una certa superficie di RIEMANN: quella che rappresenta la curva all'infinito di f. La connessione a due dimensioni della varietà V vien ritrovata coll'*analysis situs* dal POINCARÉ (*Journal de Math.*, 1906). Ma nella formola definitiva di pag. 179 occorre aggiungere q (numero qua indicato con r), perchè l'omologia (2) di pag. 168 equivale a $2p-q$ condizioni semplici.

Digitized by Google

F. POCKELS. – *Lehrbuch der Kristalloptik* (Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften). Mit 168 figuren im Text und 6 Doppeltafeln. Leipzig und Berlin, Teubner, 1906. 8°, X+520. (Prezzo del vol. leg. Mk. 16.—).

Ad attrarre su quest'opera l'attenzione non solo dei cultori dell'ottica, ai quali il nome del Pockels è ormai ben noto, ma anche dei matematici e dei cristallografi basterà accennare che il Pockels è valoroso allievo di W. Voigt non fuor di misura chiamato da Alfonso Sella «la prima autorità vivente della materia».

Scopo del libro è di presentare questa importante ed elegante branca della fisica al grado di sviluppo teorico oggigiorno da essa raggiunto. Convien dire subito che il Pockels in questa pubblicazione si rivela abile trattatista. Infatti la materia è svolta in tal modo che tanto il matematico, quanto il fisico, come il cristallografo trovano un'esposizione confacentesi ai loro studî abituali; e quando si metta a lato di quest'ultimo quasi esclusivamente sperimentatore e ricercatore pratico il primo, dominatore dell'astratto, a sua volta dominato dal fascino innegabile dell'astrazione e perciò quasi rifuggente da ciò che sa di materializzato, non si può a meno di riconoscere la difficoltà dell'accontentare l'uno e l'altro non solo, ma di invogliarli a porgere la mano al fisico per cooperare allo studio di fenomeni interessantissimi sia dal punto di vista teorico che dal pratico, come pure senza dubbio (e non è affatto trascurabile) da quello estetico; fenomeni succedentisi in un campo che si presta forse più d'ogni altro ad essere brillantemente sfruttato da molti lati, in quello cioè delle sostanze cristalline. E il desiderio d'interessare ancor più i matematici ai problemi d'ottica l'autore lo esprime nella chiusa della prefazione; inoltre alludendo loro dice: «denen die Krystalloptik früher so vielfache Förderung zu danken hatte» e ciò oltre ad un doveroso senso di riconoscenza racchiude un larvato accenno alla bontà del fruttifero campo di studio.

Un matematico non poteva anzitutto non cercare di sceglier con cura il suo materiale rappresentativo presso il lettore, intendo accennare alla terminologia e alla fraseggiatura. Basandosi infatti sul più razionale valore etimologico delle parole adoperate o proposte finora, non esita a sacrificare denominazioni comunissime, che potrei dire, adoperando un luogo comune, consacrate dall'uso, come se l'uso nel campo scientifico fosse una buona ragione laonde perpetuare delle inesattezze nelle scienze che per antonomasia si chiamano esatte.

E perciò non esita a rigettare gli appellativi *assi ottici* («optische Achsen») e *assi dei raggi* («Strahlenachsen») per adoperare esclu-

Digitized by Google

sivamente le denominazioni di Flechter « Binormalen » e « Biradialen »; così adopera l'espressione « optisch drehend » invece di « optisch aktiv » e specialmente di quest'ultima sostituzione non v'è chi non ne veda la opportunità. La prima qui accennata è assai più ardita, tanto che il Liebisch stesso, così puro nel suo linguaggio nel suo « Grundriss der phisikalischen Krystallographie » (1895) continua ad adoperare « optische Achsen » e « Strahlenachsen ». Una sola osservazione su questo punto mi sia permessa.

Perchè il Dr. Pockels, animato da siffatta buona volontà depuratrice, continua ad usare le parole *uniassico* (« einachsig ») e *biassico* (« zweiachsig ») parlando dei cristalli? Il Liebisch lo evitò. E qui l'uso è tanto più pericoloso inquantochè l'aggettivo *biassico* aggiunto a *cristallo* per somiglianza ad *uniassico* porta facilmente alla credenza invero troppo diffusa, che nelle sostanze cosidette biassiche vi sieno due direzioni aventi otticamente le proprietà dell'asse di simmetria superiore dei cristalli uniassici, mentre in realtà non ve n'è alcuna.

La materia è divisa in quattro parti preceduta da una introduzione in cui sono svolti i concetti fondamentali della teoria generale della luce. Riguardo anzi a questa teoria elettromagnetica l'autore dice che ormai essa può adattarsi ad essere convenientemente esposta come fondamento anche in un trattato che si occupi della propagazione della luce nei cristalli; soltanto lo svolgimento di essa dalle equazioni differenziali è dato in speciali paragrafi allo scopo di non inceppare la lettura del testo ai cristallografi o mineralisti; cosicchè essi possono usufruire di tutto il rimanente dell'opera il cui stile è piano e facile, esigente per la comprensione solo elementari nozioni di fisica e matematica, e, quando desiderino conoscere il modo geniale col quale furono trattati i problemi più arditi dell'ottica e furono plasmate le teorie più concettose, non hanno che da sottoporsi al non eccessivo sforzo della lettura dei capitoli ove sono nitidamente esposte le ricerche analitiche di Fresnel, Cauchy, Maxwell, Voigt, Poincaré, Drude ecc.

Per avere un'idea della concisione e chiarezza simultaneamente possedute dal Pockels in questo suo libro basta p. e. leggere il capitolo III della prima parte, intitolato « Theoretische Begründung der fresnelschen Gesetze der Lichtfortpflanzung in Krystallen », in cui è specialmente degno di nota per l'attualità l'ultimo paragrafo contenente la « Elektronentheorie des Lichtes ».

D'altra parte per non ripetere cose per il suo scopo secondarie, già dette maestrevolmente da altri, l'autore non si preoccupa dei metodi pratici di osservazione; analizza invece sottilmente i risultati di questa, mantenendosi così in perfetta armonia con l'indole strettamente teorica del libro.

Circa poi la scelta dei risultati sperimentali, mostra la prudenza che esige la delicatezza dell'argomento; in generale i nomi degli spe-

Digitized by Google

rimentatori citati dànno sicuro affidamento e non esita a porre in evidenza errori di qualcuno che ottenendo valori d'esperienza discostantesi da quelli previsti dalla teoria attribuisce ciò senz'altro alla insufficienza della medesima.

Felice pure l'idea di scegliere per comporre le sei tavole in nero che accompagnano il testo le magnifiche fotografie dello Hauswaldt tolte dall'atlante « Interferenzerscheinungen in polarisierten Licht » dal Pockels stesso chiamate giustamente « unerreichte ».

Il lasciare da parte tutto ciò che riescirebbe superfluo permette al Pockels di poter sviluppare in circa cinquecento pagine tutta l'ottica dei cristalli in modo completo. Dopo la breve introduzione di cui si è detto sopra, nella prima parte della materia, che è la preponderante (circa tre quinti dell'intera opera) l'A. tratta dei fenomeni che avvengono nei cristalli trasparenti senza potere assorbente o rotante. Ricorderemo poi oltre al precitato cap. III, la risoluzione del problema relativo alle modificazioni subite da una vibrazione attraversante un numero qualunque di lamelle cristalline sottili data colla rappresentazione geometrica dovuta al Poincaré dell'ellisse di vibrazione (utilizzata poi ancora nella parte che riguarda il potere rotatorio). La tendenza all'esame del caso generale per tutte le molteplici quistioni si manifesta sempre chiaramente e a questo non c'è che da plaudire; così pure grazie al linguaggio serrato l'autore può permettersi di approfondire ogni tema e arricchirlo di particolari; l'unica cosa forse un po' scarsa nonostante il proponimento di un indirizzo puramente teorico dell'opera è il § 3 del cap. VIII dove si parla delle *applicazioni all'esame ottico di sezioni sottili di un minerale* (fra l'altro p. e. quando parla dell'*estinzione retta* per cristalli trimetrici e monoclini non sarebbero state di troppo due paroline anche per i dimetrici, esagonali e romboedrici). L'argomento possiede tale entità (è la base della Petrografia) che sette pagine sono poche.

Le ricerche ottiche sui cristalli misti (oggigiorno tanto d'attualità) sono trattate con equa larghezza partendo dalla vecchia teoria di Mallard e arrivando fino agli ultimi interessanti lavori del Pockels stesso, di Wallerant e Wulff.

La seconda parte tratta dei cristalli con potere rotatorio. Sono settanta pagine di cui riescono specialmente interessanti quelle in cui vengono ricordati i lavori di Pocklington e Voigt sul potere rotatorio dei cristalli « biassici » e di Voigt, Weder, Drude per la teoria della propagazione della luce nei cristalli con potere rotatorio.

La terza parte *(Fenomeni d'assorbimento nei cristalli)* è press'a poco della mole della precedente e fra le citazioni dei lavori moderni largheggiano quelle di Drude e Voigt per la parte teorica, di Carvallo, Camichel, Königsberger. Ehlers per le applicazioni. A questa parte è dato dall'A. uno sviluppo che parrebbe forse, più che per la precedente, sproporzionato, quando non si tenesse conto che effettivamente questi

Digitized by Google

due campi dell'ottica si sono assai avvantaggiati nell'ultimo decennio e che vale diffondersi promettendo buona messe per l'avvenire.

Ma la più originale delle quattro parti è senza dubbio l'ultima, per la molto semplice ragione che l'A. stesso vi ha contribuito in larga parte. Tratta delle *variazioni delle proprietà ottiche causate da azioni esterne*. In queste ultime cinquanta pagine si sente la compiacenza dello scienzato che parla di cose le quali tennero il dominio quasi completo della sua attività per parecchi anni. Basti il ricordare che il Pockels ci ha dato la teoria sulle variazioni delle proprietà ottiche dei cristalli sottoposti a pressioni.

Riassumendo: è un lavoro ben fatto, scevro di errori, che ha il pregio di offrir cose nuove; vi si potrà notare una certa abbondanza nelle citazioni proprie, di Voigt e Drude, ma data la loro attività la cosa è giustificabile, e del resto non sono trascurati neanche gli stranieri; fra gl'italiani Viola, Cesàro, Sella. L'espressione è brillante, benchè vi si senta un po' insistentemente l'analista puro, ricorrente il meno possibile a costruzioni e dimostrazioni geometriche; mentre talora non sarebbe male, quando si possa, fare il contrario; il Pockels tuttavia si mantiene sempre elegante e conciso. Aggiungasi che, senza pretesa di darvi eccessiva importanza, la parte storica, confortata dalle relative citazioni, non è mai dimenticata.

Libri di questo tipo, trattanti cioè in modo puramente teorico la ottica dei cristalli, abbiamo fra i più recenti il « Kompendium der theoretischen Physik » (Vol. II) del Voigt e del Liebisch la « Physikalischen Krystallographie », e sono il primo del 1896, il secondo del 1890. Considerando i progressi fatti specialmente nello studio dei fenomeni di assorbimento e del potere rotatorio non c'è dubbio che i fisici, i cristallografi e i matematici accoglieranno con vivo piacere questa nuova pubblicazione.

L'editore poi non ha mancato di mostrare la consueta cura per questo volume; le figure sono chiare e nitidissime come la stampa; errori tipografici quasi nessuno.

P. A. CASSINIS.

RUGGERO PANEBIANCO. — *Trattato di cristallografia morfologica*. — Padova, Società Cooperativa Tipografica, 1906, 8°, pag. 287 con molte figure (Prezzo L. 6.—).

Questa opera del chiarissimo Professore di Mineralogia dell'Università di Padova, pubblicata con la collaborazione del Professore E. Billows suo assistente, è un altro lavoro concernente i cristalli pure interessante per i matematici.

Digitized by Google

L'elegante scuola latina di Quintino Sella continua prosperosamente a fruttare. Il Panebianco nel 1887 diede alle stampe la prima parte di un suo trattato di mineralogia nel quale, seguendo l'indirizzo dato dall'illustre professore di Torino, svolse la cristallografia morfologica introducendo l'uso dei determinanti nell'esposizione dei teoremi e nella soluzione dei problemi.

A ciò fu spinto (come egli stesso osservava nella prefazione) sentendo le belle lezioni dello Struever che « a vanto d'Italia, possiamo asserire superiori a quelle di qualsiasi altra università ».

Il giovine mineralista rigidamente nella stessa prefazione scriveva: « chi non conosce la geometria non entri ». Ora (experientia docet) ha modificato alquanto la sua opinione, e nell'esordio del suo nuovo trattato la sentenza, dura per gli studenti che provengono dal liceo, è rivolta solo a chi desideri della mineralogia fare oggetto speciale di studio.

Il libro del 1887, che era più che altro una rapida e succosissima esposizione della cristallografia geometrica, ha cambiato vantaggiosamente aspetto, aumentata sostanza e mole. Ora serve molto utilmente come libro di testo per lo studente universitario di mineralogia, piano, senza complessità, ricco di note speciali per i deficienti di nozioni matematiche; serve altrettanto bene, anzi è indispensabile a chi si dedichi praticamente alla cristallografia. L'indirizzo è strettamente geometrico; è l'applicazione della trigonometria sferica e della geometria analitica allo studio di quei poliedri che sono veste spontanea delle sostanze cristalline. La concezione dell'opera è affatto moderna; fulcro ne è il teorema di Hessel che domina tutti i poliedri forniti di combinazioni di simmetria ottenute con elementi di simmetria cristallografici, alle deduzioni del quale, per limitare il campo entro cui cadono i poliedri cristallini, viene poi applicata la legge di Haüy con tutte le sue deduzioni.

Mira speciale dell'A. è di difendere dai reiterati tentativi d'attacco con tutta la sua possanza (valida certo data l'eminente autorità dello scrittore) la preziosa legge d' Haüy; e perciò egli dedica uno fra i più bei paragrafi del suo libro all'esposizione, all'interpretazione giusta e alla valutazione della portata di essa. E di ciò è tanto più sentito il bisogno inquantochè sembra ci sia vaghezza da parte di alcuni d'intorbidare la luce di quanto gode di aureo splendore.

In questo trattato i trentadue gruppi dell'Hessel sono indicati mediante una semplicissima simboleggiatura: una lettera greca affetta da un indice (v. Rivista di Cristallografia e Mineralogia italiana vol. XXVIII, p. 133). In questo modo si ha il vantaggio di poter indicare p. e. soltanto con ε_4 quel gruppo che dovrebbe chiamarsi coll'epiteto impressionante di acleistoso ditrigonale secondo il Lewis, o ditrigonale-piramidale secondo il Groth o meglio ancora emiedrico romboedrico emimorfo secondo il Naumann.

Digitized by Google

Notevole ancora è la razionale orientazione adottata per gli assi del sistema esagonale in modo che nella proiezione stereografica quelli delle x, y, ξ coincidono colle proiezioni degli assi x, y, z del sistema romboedrico.

L'asse delle y è diretto verso l'osservatore e perciò tali proiezioni presentano una comodissima simmetria rispetto le cifre che costituiscono i loro simboli.

L'edizione è ricca di figure quasi tutte disegnate appositamente; non è dimenticato omaggio alla nostra gloria italiana il Prof. Struever, di cui sono riportati alcuni bellissimi disegni di spinello e pirite tolti dai suoi classici lavori.

La composizione tipografica è fatta in due caratteri, talchè è facile riconoscere ciò che è sufficiente allo sviluppo del programma universitario (carattere grande), da ciò che serve a formare il cristallografo (carattere piccolo) il quale ora possiede in questo libro l'unica opera italiana moderna di cristallografia geometrica fatta sul serio e che senza dubbio data la limpidezza di concetti e genialità della scuola italiana avrà l'onore della traduzione in lingue straniere. Quest'opera fu già adottata oltrechè a Padova, nell'ateneo genovese come libro di testo e lo sarà indubbiamente ovunque s'intenda concedere nell'insegnamento della mineralogia quello sviluppo alla cristallografia geometrica che le compete data l'importanza (da molti non sufficientemente valutata) di questa brillante applicazione delle scienze esatte.

I soliti inevitabili errori di stampa (facilmente correggibili dal lettore) verranno elencati assieme a qualche nota prima del volume contenente la cristallografia fisica, che godiamo sperare sia presto pubblicato.

P. A. Cassinis.

J. Sobotka. *Deskriptivní geometrie promítání paralleluího.* V. Praze 1906. 8° gr. p. XVII+613.

Questo volume di lezioni dell'egregio professore della Università czeca di Praga è destinato ad essere per la maggioranza dei nostri lettori come il libro dell'Apocalisse, il celebre libro dei sette suggelli. Poichè la lingua in cui è scritto non ci consente di esporne un sunto e tanto meno di pronunciare su di esso un giudizio qualsiasi, vogliamo almeno tentare di darne una vaga idea al lettore col fotografarne qui lo scheletro di essa. Si vedrà così come l'opera del Prof. Sobotka non si possa considerare come un trattato completo di geometria descrittiva (mancando in esso ad es. tutta la teoria e la rappresentazione della superficie), mentre per compenso contiene teorie (v. specialmente Cap. X) che non tutti includono nel regno di quella disciplina.

Cap. I (p. 1-11) Concetti fondamentali e convenzioni. Natura e scopo della geometria descrittiva. Suo modo di procedura nella riso-

Digitized by Google

luzione dei propri problemi. Sua importanza. Metodi di rappresentazione elementari. Postulati di costruzione nello spazio. Metodo di ricerca della geometria descrittiva. Sistema per indicare punti e figure.

CAP. II (p. 12-55). PROIEZIONI QUOTATE. Rappresentazione del punto, della retta e del piano. Problemi relativi. Applicazioni alla topografia ed alla scienza delle costruzioni.

CAP. III (p. 56-78). PROIEZIONI CICLICHE *(Ciclografia di Fiedler)*. Rappresentazione del punto, della retta e del piano. Del cono rotondo. Problemi.

CAP. IV (p. 79-143). USO DI UN PIANO DI DISTANZA ED INTRODUZIONE DI NUOVI PIANI DI PROIEZIONE. Rappresentazione di punti. rette e piani. Problemi. Teoremi di Desargues sui triangoli prospettivi. Configurazione di Hesse. Determinazione di distanze ed inclinazioni; ribaltamenti. Della sfera. Problemi. Trasformazione dei piani di proiezione. Proiezioni su due qualunque piani di riferimento. Passaggio da due piani di proiezione inclinati comunque fra di loro a due piani di riferimento fra loro ortogonali. Applicazione della trasformazione dei piani di riferimento alla risoluzione di problemi stereometrici.

CAP. V (p. 144-162). PROIEZIONE OBLIQUA SU DI UN PIANO. Proposizioni fondamentali di questo metodo di proiezione. Moduli delle proiezioni e legami fra proiezioni differenti di dati punti. Problemi di posizione. Distanza di due punti ed inclinazione della loro congiungente sul piano di proiezione. Ribaltamento dei piani obbiettivi. Angoli di due rette o di due piani. Distanza di un punto da un retta od un piano.

CAP. VI (p. 163-189). ELEMENTI FONDAMENTALI E FORME GEOMETRICHE FONDAMENTALI; ALCUNI METODI PER DETERMINARE GLI ELEMENTI. Trasformazioni geometriche ed incidenza di elementi fondamentali. Senso di segmenti od angoli. Rapporti di sezione relativi ad angoli o segmenti. Figure armoniche.

CAP. VII (p. 190-357). AFFINITÀ. Preliminari. Affinita tra figure piane, vari modi per determinare una tale relazione. Angoli o segmenti eguali corrispondentisi in un'affinità. Proiezione parallela del cerchio; costruzioni e proprietà dell'ellisse. Intersezione di un'ellisse con un cerchio. Altre costruzioni relative all'ellisse. Proiezioni parallele generali del cerchio; costruzioni che ne emergono. Affinità generale tra figure piane. Applicazione dell'affinità alla risoluzione di problemi metrici concernenti la proiezione parallela. Costruzione di figure piane congruenti. Affinità nello spazio. Affinità generale tra due figure solide. Congruenza nello spazio.

CAP. VIII (pag. 358-498). PROIEZIONI ORTOGONALI SOPRA DUE PIANI FRA LORO NORMALI. Determinazione della posizione d'un punto rispetto a tre piani mutuamente ortogonali, proiezioni del punto sopra i piani coordinati e rappresentazione delle sue coordinate. Piani bisettori. Proiezioni delle rette. Rappresentazione del piano. Posizioni

Digitized by Google

rispettive di due rette, due piani od una retta ed un piano. Problemi relativi a piani. Intersezioni di piani e rette. Spostamento e soppressione della linea di terra. Problemi metrici; ribaltamenti. Proiezioni del cerchio; problemi relativi. Cambiamento dei piani di proiezione; applicazione ad alcuni problemi. Rotazione attorno ad un asse.

Cap. IX (p. 499-534). Concetto prospettivo dello spazio; dualità. Elementi all'infinito; triangoli prospettivi. Legge di dualità nel piano, nella stella e nello spazio. Applicazioni. Tetraedri prospettivi e configurazioni risultanti.

Cap. X (p. 535-624). Esecuzione grafica delle costruzioni. *a*) ***Teoria delle costruzioni grafiche***: Geometria di precisione e geometria di approssimazione. Geometrografia. Rappresentazione grafica dell'intersezione di due o più rette. Rappresentazone analitica delle figure grafiche. Elementi irraggiungibili. Costruzioni grafiche relative agli elementi all'infinito. *b*) ***Costruzioni ausiliari***. Proposizioni fondamentali. Intersezione di due piani nel caso in cui i punti d'intersezione delle traccie ononime non cadono entro il limite del disegno. Congiungente d'un punto con l'intersezione inaccessibile di due rette: intersezione di una tale retta con una retta data. Retta parallela ad un'altra e passante pel punto inaccessibile comune ad altre due; intersezione di tale retta con una retta data. Congiungente di due punti inacessibili. Normale ad una retta da un punto inaccessibile; costruzione diretta del piede relativo. Per un punto condurre la parallela o la perpendicolare alla retta che congiunge due punti inaccessibili. Bisettrice d'un angolo col vertice inaccessibile. Divisione in dato rapporto di un segmento inaccessibile. Rappresentazione grafica del punto d'intersezione di due rette formanti un angolo piccolissimo. Congiungente di due punti vicini d'un cerchio. Tangente in un punto ad un cerchio di centro ignoto od inaccessibile. Rappresentazione di un piano che unisce un punto ad una retta formante con la linea di terra un angolo piccolissimo. Problemi relativi al cerchio. *c*) ***Costruzioni relative a curve grafiche; curve d'errore***. Continuità di una curva riguardo ai suoi punti ed alle sue tangenti; cerchio di curvatura. Curve rappresentate graficamente; curve d'errore. Rappresentazione delle tangenti e dei punti di contatto di curve grafiche. Costruzione delle normali e del cerchio osculatore. Applicazione delle curve d'errore alla determinazione del cerchio osculatore all'elisse in un vertice. *d*) ***Sopra i cerchi di curvatura in punti corrispondenti di due curve affini***. Relazione fra i raggi di tali centri; caso speciale in cui si tratta di una curva piana e della sua proiezione ortogonale. Piano osculatore e cerchio di curvatura di una linea gobba. Costruzioni speciali all'ellisse. *e*) ***Rettificazione e divisione di archi di curve***. Lunghezza d'un arco come limite. Rettificazione approssimata di un arco di curva, della circonferenza o di un arco circolare. Divisione approssimata d'un arco circolare in un dato rapporto. G. L.

Digitized by Google

G. VIVANTI: *Theorie der eindeutigen analytischen Functionen;* deutsch herausgegeben von A. GUTZMER, Leipzig, Druck und Verlag von B. C. Teubner, 1906. [Prezzo del vol. leg. Mk. 12].

L'idea di una esposizione della teoria delle funzioni analitiche uniformi, basata sul solo metodo elementare di *Weierstrass*, che, rendendo l'analisi indipendente dal Calcolo Infinitesimale, fa della medesima una continuazione immediata dell'Algebra, e che sul metodo di *Cauchy* e *Riemann* ha il vantaggio di essere, dal punto di vista logico più rigoroso, idea già tradotta in atto nella prima edizione italiana (Manuali Hoepli, 1901) con notevole diffusione per tutta quella parte della teoria, che è divenuta oramai classica, in modo assai succinto e frammentario per il resto, ha ricevuto un più ampio sviluppo nella nuova edizione tedesca, della quale è ancora caratteristica principale l'uniformità di metodo, ovunque rigorosamente osservata. Tale uniformità di metodo, conseguita a prezzo di un lavoro costante e non sempre facile, giova all'euritmia ed all'eleganza dell'esposizione, pregi che, nel libro di cui è parola, s'accoppiano alla precisione ed alla chiarezza; ma non è d'altra parte da disconoscere che essa nuoce alla speditezza ed alla concisione, e che talvolta è utile servirsi promiscuamente dell'uno e dell'altro metodo, specie quando si tratti di quei nuovi capitoli, che sono tutt'ora in via di formazione. Debbo però subito dire che, anche questi nuovi capitoli hanno ricevuto nel libro dei signori *Vivanti* e *Gutzmer* una trattazione considerevolmente ampia, che può in qualche parte sostituire con vantaggio la numerosa schiera delle memorie originali, e che in ogni caso rappresenta una guida preziosa per chi voglia esplorare questi nuovi e fecondi campi, servendo assai bene a mettere in luce quale sviluppo abbia in essi raggiunto la scienza. A tale scopo giovano sopratutto una grande ricchezza di citazioni, che via via s'incontrano nel testo, ed infine una lista bibliografica, se non completa, assai vasta, che si estende fino alla metà del 1905.

Fra i capitoli, che in quest'ultima parte del libro meglio sono stati svolti, merita in modo speciale di essere ricordato quello *sulla teoria delle funzioni trascendenti intere*, che, limitato nella vecchia edizione a pochi, brevissimi cenni, ha ora assunto le proporzioni di una vera e propria monografia sull'argomento. Completamente nuovo è inoltre il capitolo sulle serie divergenti, ed ancora molto accresciuti, fra gli altri, quelli *sulla rappresentazione e sui punti singolari delle funzioni analitiche.*

Numerose aggiunte e modificazioni sono state anche fatte nelle due rimanenti parti, che precedono quella ora detta, e contengono, l'una le *nozioni principali della teoria degli aggregati*, l'altra *la teoria generale delle funzioni analitiche.* Fra le aggiunte piacemi notare quella,

Digitized by Google

già da me indicata quando riferii in questo stesso *Bollettino* (V, 1902, p. 45) sulla prima edizione italiana, dei concetti di addizione e moltiplicazione dei numeri cardinali transfiniti e delle formole relative, concetti e formole di grande importanza, che possono dar luogo a notevoli applicazioni (cfr. *Cantor: Beiträge zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre* 1. [Math. Ann. T 46, 1895]); e quella di una lista bibliografica sulla teoria degli aggregati, che ora trovasi incorporata nell'altra, di cui sopra ho fatto cenno; per tralasciare di altre minori, dirette allo scopo di arricchire il libro di nuovi risultati o di maggiori dettagli in quanto vi era già contenuto.

L'A. chiude la sua prefazione esprimendo la speranza che il libro possa essere favorevolmente accolto dai giovani matematici tedeschi, e contribuire al progresso della moderna Analisi; io terminerò aggiungendo, come già feci parlando dell'originale italiano (e ve n'è ora più che mai ragione) che nella biblioteca di ogni studioso non dovrebbe mancare questo volume.

CARLO SEVERINI.

G. VIVANTI. *Elementi della teoria delle funzioni poliedriche e modulari* (Hoepli, Milano, 1906). [Prezzo Lire 3].

Ecco un nuovo libro che degnamente aumenta la serie degli ottimi e così noti trattati, con cui il Prof. Vivanti sa riassumere ed esporre elementarmente nelle loro parti fondamentali tante importanti teorie dell'analisi moderna, e che hanno avuto così favorevole accoglienza sia in Italia, che all'estero. Il presente volumetto ha lo scopo di esporre i tratti principalidelle teorie dell'icoosaedro e delle funzioni modulari.

I primi sedici paragrafi espongono quanto è necessario conoscere della teoria generale dei gruppi discontinui; ad essi segue lo studio delle trasformazioni lineari su una variabile complessa z, la loro classificazione, e l'esame delle loro prime e più importanti proprietà. Al § 35 comincia la ricerca dei gruppi finiti di sostituzioni lineari, partendo dalle proprietà dei poli di tali sostituzioni. La ricerca, interrotta nei §§ 39-48, dedicati allo studio delle peudosostituzioni lineari (*), viene ripresa ai paragrafi 49 e segg., nei quali (ricorrendo alla sfera complessa della variabile z) si costruiscono effettivamente tutti i gruppi ricercati. Lo studio dei sottogruppi di tali gruppi, la loro rappresentazione sul piano, la ricerca di un sistema di trasformazioni generatrici sono svolte con estrema chiarezza. La rappresentazione

(*) Con le parole « pseudosostituzione lineare » il Prof. Vivanti intende la trasformazione $z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}$ (α, β, γ costanti; z_0 variabile immaginaria coniugata di z).

Digitized by Google

piana dei gruppi, e dei loro campi fondamentali porta al concetto generale delle reti di triangoli a lati rettilinei o circolari che sono generabili partendo da uno qualsiasi dei triangoli della rete stessa mediante successive riflessioni, e che ricoprono semplicemente una regione del piano, o il piano intero. Si dimostra che quelle reti, per cui la somma degli angoli di un qualunque triangolo è superiore a due retti, non sono che le reti invarianti per uno dei gruppi finiti già trovati, che le reti per cui la somma degli angoli di un triangolo è minore di due retti hanno un cerchio limite reale. Si studiano quindi le proprietà di queste reti dal punto di vista della teoria dei gruppi discontinui.

Si vede che così viene indirettamente definita un'ampia classe dei gruppi cosidetti fuchsiani: la trattazione non potrebbe essere più elementare. L'ingegnoso artificio di ricorrere alla teoria delle reti triangolari per giungere a tali gruppi rende possibile l'uso di metodi di grande semplicità; cio che é di estrema importanza per un libro dedicato a giovani, che appena cominciano lo studio dell'analisi odierna. La teoria acquista però così in qualche punto un non so che di artificiale, che appare specialmente al § 87, quando si definisce il gruppo modulare come quel gruppo, che trasforma in sè stessa una rete, i cui triangoli hanno angoli uguali ordinatamente a $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{\infty}$. Si deve però aggiungere che certamente non esiste alcun metodo, pari per semplicità e brevità a quello del Prof. Vivanti, che permetta di trattare in modo così facile ed elementare questioni certamente non semplici.

Con grande eleganza e chiarezza é quindi svolta la teoria dei sottogruppi del gruppo modulare: la precisione della trattazione, gli esempii esplicativi rendono assai notevoli questi ultimi paragrafi della prima parte, in cui sono riassunti nel modo migliore quasi tutte le idee fondamentali delle « Modulfunctionen » di Klein e Fricke.

La seconda parte del trattato è dedicata alle applicazioni e alla teoria delle funzioni ed equazioni poliedriche e modulari. Si comincia con lo studio delle forme algebriche binarie invarianti per una trasformazione lineare omogenea, e per un gruppo finito di tali trasformazioni, cercando di rendere la trattazione quanto più omogenea possibile. E se ne deduce l'esistenza delle funzioni (poliedriche) invarianti per un gruppo finito, e delle funzioni fondamentali (che hanno valori uguali *soltanto* in punti corrispondenti per il gruppo). La teoria delle funzioni ellittiche permette di estendere tali risultati al gruppo modulare; a cui segue lo studio delle funzioni invarianti per un sottogruppo del gruppo modulare, studio, che non potrebbe essere fatto in modo più piano.

Se $f(z)$ è una funzione di z invariante per un gruppo poliedrico, o modulare, l'equazione $f(z) = c$ (dove $c =$ cost.) riceve il nome di

Digitized by Google

equazione poliedrica o modulare: il Vivanti studia le relazioni che passano tra tali equazioni, l'equazione differenziale di Schwarz, le equazioni lineari del secondo ordine a derivate ordinarie, e la serie ipergeometrica.

Riassunti in modo conciso i fondamenti della teoria di Galois, si dimostra poi che una equazione poliedrica ha per gruppo il corrispondente gruppo poliedrico. Lo studio dei sottogruppi invarianti di questo gruppo, che è giá stato fatto precedentemente, permette di risolvere per radicali le equazioni poliedriche non icosaedriche. Si è così naturalmente condotti a studiare l'irrazionalità icosaedrica, che comparisce come una nuova irrazionalità, che spontaneamente si presenta in questi ordini di studii. E in poche pagine si espone la teoria delle risolventi della equazione icosaedrica, mostrando come questa teoria trovi la sua corrispondente anche nello studio del gruppo modulare.

Infine si studiano le relazioni tra le equazioni algebriche di 3°, 4°, 5° grado con le equazioni poliedriche (diedrica di 6° grado, ottaedrica e icosaedrica), esponendo i principali risultati delle *Vorlesungen ueber das Ikosaeder* del Klein sotto una forma, che li rende assai perspicui e più ordinati.

Riassumendo, io credo che il trattato del Prof. Vivanti sarà un libro prezioso per i giovani, che vogliano avviarsi allo studio dei gruppi discontinui, e delle funzioni automorfe (che formano senza dubbio uno dei campi più interessanti dell'analisi odierna) specialmente per la novità e semplicità dei metodi, l'ordine e il rigore delle dimostrazioni, che dominano in ogni pagina di questo libro.

G. Fubini.

R. W. H. T. Hudson. *Kummer's quartic surfaces.* Cambridge, University Press, 1905, 8° P. | XI+222 [Prezzo del vol. leg. Sh. 8].

La teoria della superficie di Kummer gode una posizione affatto privilegiata nello scibile matematico, per trovarsi essa al confluente di molteplici dottrine e per essere stata, conseguentemente, coltivata da matematici delle più svariate od opposte tendenze. Se da un lato, per la notevolissima disposizione de' suoi punti e piani singolari, essa diede materia ad uno dei più interessanti capitoli della teoria delle configurazioni, da altro lato, grazie alla rappresentazione parametrica che essa ammette mediante funzioni *theta* diede materia a profondi e geniali studi da parte degli analisti; inoltre il suo intervento in questioni di geometria della retta e la presenza di un caso speciale di essa (la « superficie delle onde ») in uno dei più importanti rami di fisica, mostrano esser dessa, non un ente generato dalla fantasia, talora sbrigliata, dei geometri, ma sibbene una figura avente diritto

Digitized by Google

all'esistenza ed alla generale considerazione. In forza di tutte queste circostanze il raccogliere e coordinare le proprietà della superficie di Kummer parve, a ragione, all'A. della monografia che annunciamo, compito utile e degno, e tale apparirà a chiunque abbia qualche famigliarità col soggetto; tutti dovranno poi riconoscere che egli seppe egregiamente adempiere il suo assunto e gli tributeranno larga lode per avere tenuto conto di tutta l'opera de' suoi predecessori, averla ordinata in modo pienamente soddisfacente (1) ed arricchita quà e là di osservazioni originali.

Sgraziatamente egli non assiste al proprio ben meritato trionfo; chè nell'autunno 1904, a soli ventinove anni, egli perdette miseramente la vita in un accidente di montagna. Rimasero così deluse le speranze che in lui riponevano condiscepoli e maestri, i quali lo avevano applaudito quando negli anni 1898, 1899 e 1900 egli aveva riportate le massime distinzioni in pubblici esami e poi quando era stato successivamente eletto « fellow » del Collegio S. Giovanni di Cambridge, lettore nel Collegio universitario di Liverpool (1902) e finalmente dottore dell'Università di Londra (1903). Da tali fatti essi traevano i più lieti auspici per uno splendido avvenire; i lettori del volume annunciato troveranno ivi ragioni per trovare ben giustificate tali previsioni e per associarsi al rimpianto che accompagnò l'improvviso tramonto di una stella di prima grandezza, appena sorta sull'orizzonte.

G. L.

Vorlesungen ueber photographische Optik von Dr. ALEXANDER GLEICHEN. Regierungsrath und Privatdozent. Mit 63 Figuren. - Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung. 1905. p. IX-230.

Nella introduzione al bellissimo libro « *Le proprietà cardinali degli strumenti diottrici* », Torino 1876, G. Ferraris giustamente lamentava che dopo circa 36 anni dalla pubblicazione delle famose *Dioptrische Untersuchungen* di Gauss (1840), i trattati più estesi e più diffusi di fisica e di geodesia non accennavano nemmeno alla nuova teoria o ne

(1) Per porgere un'idea del piano e dell'estensione dell'opera dell'Hudson diamo qui l'indicazione dei capitoli che la formano: I. *Configurazione di Kummer.* II. *La superficie di Kummer.* III. *La matrice ortogonale di forme lineari.* IV. *Geometria della retta.* V. *Il complesso e la congruenza di secondo grado.* VI. *La superficie del complesso di Plücker.* VII. *Gruppi di nodi della superficie di Kummer.* VIII. *Equazione della superficie di Kummer.* X. *La superficie delle onde.* XI. *Realità e topologia.* XII. *Geometria a quattro dimensioni.* XIII. *Curve algebriche sulla superficie di Kummer.* XIV. *Curve di vari ordini.* XV. *Superficie di Weddle.* XVI. *Funzioni theta.* XVII. *Applicazioni del teorema di Abel.* XVIII. *Superficie di Kummer singolari.*

Aggiungiamo che il volume è ornato di una riproduzione in zincotipia del noto modello della superficie in questione con 16 punti doppi *reali*.

Digitized by Google

davano un sunto più che imperfetto; malgrado che, sopratutto per i lavori del Maxwell e del Neumann, si potessero esporre in modo semplice e sintetico i principali risultati della teoria gaussiana.

L'opera del Ferraris, già stata preceduta in Italia da quella del Casorati, fu tosto seguita, specialmente in Germania, da altre numerosissime, fatte su piani più vasti e condotte col sussidio di più elevati metodi analitici; tra queste non si deve dimenticare la eccellente ed erudita *Theorie und Geschichte des photographischen Objektives* del Rohr, Berlin, 1899.

Una tra le più recenti è appunto questa del Dr. Gleichen che esaminiamo; ed è un riassunto delle lezioni fatte dall'autore, nell'inverno 1902-1903, nella scuola politecnica di Charlottenburg-Berlin.

L'A. si è proposto di esporre e riassumere in forma elementare — si vale appena dei più elementari concetti e risultati dell'analisi infinitesimale — tutto quanto si è fatto di notevole sulla teoria geometrica degli istrumenti ottici, in particolare sugli obbiettivi fotografici e sulla loro costruzione, dalla seconda metà del secolo scorso; da quando cioè, raggiunto da Gauss il più gran progresso nella teoria, dal punto in cui l'avevano lasciata Euler, Lagrange, D'Alembert, Möbius, s'iniziò l'epoca dei lavori di Petzval, Listing, Seidel, e quella degli importanti perfezionamenti nella costruzione dei vetri per gli obbiettivi, sopratutto in Germania.

I primi tre capitoli di questa notevole opera trattano sostanzialmente, in forma assai chiara e semplice, della teoria gaussiana nell'ipotesi di una luce monocromatica; ed il quarto tratta di alcune delle alterazioni degli elementi fondamentali di un sistema centrato nel passaggio da uno ad un altro colore e dell'acromatismo.

Accennate di volo, perchè non importanti pei moderni sistemi fotografici, le correzioni di Seidel alla teoria gaussiana, quando cioè nello sviluppo del seno o del coseno dell'inclinazione di un raggio sull'asse centrale, si considerano termini di secondo e terzo ordine (campo di Seidel), l'A. si intrattiene a lungo su di una importante formula di Petzval, esprimente il raggio di curvatura della immagine definitiva in funzione di elementi fondamentali delle singole lenti del sistema, cui è dedicato, insieme con numerose e svariate applicazioni, tutto il capitolo quinto.

Le ulteriori applicazioni, dal capitolo sesto al dodicesimo, premesse alcune considerazioni teoriche elementari sulla superficie di onda, sulla funzione di Hamilton, sul teorema di Malus — riguardano diffusamente l'aberrazione, l'astigmatismo, l'ortoscopia, la chiarezza, alcune semplici costruzioni di raggi rifratti, ecc. Nè mancano, riassunte dall'opera già citata del Rohr, alcune interessanti notizie storiche sulla costruzione degli obbiettivi fotografici (cap. tredicesimo), e finalmente un ultimo importante ed utilissimo capitolo espone, con una numerosa scelta di esempi numerici, la tecnica del calcolo per la

Digitized by Google

risoluzione dei vari problemi che si presentano in questa teoria: il modo di calcolare i più importanti elementi e gli errori di un obbiettivo fotografico.

L'opera, di cui non si disconoscerà l'importanza, abbonda di esempi e di dati numerici e di tavole per la costruzione di alcuni fra i più noti e celebri obbiettivi. R. MARCOLONGO.

W. H. YOUNG and GRACE CRISHOLM YOUNG. *The theory of sets of points*. Cambridge, University Press, 1906. XII+316 p. 8°.

È questa, dopo il ben noto *Bericht* di Schoenflies, la prima trattazione sistematica della teoria degli aggregati; e va data sincera lode agli autori, alle cui ricerche originali questa teoria deve notevoli progressi, di essersi accinti alla difficile impresa e di averla ottimamente compiuta. L'interesse che essi provano per la loro teoria favorita traspare da tutte le pagine del libro, e si trasfonde nell'animo di chi legge, mentre le lacune e le imperfezioni poste sinceramente in luce gli additano nuovi e fecondi campi di ricerca.

I capitoli I e II del libro che esaminiamo sono introduttorii, e contengono i principii della teoria dei numeri reali e della loro rappresentazione sopra una retta. Nel Cap. III si stabiliscono i concetti e i teoremi fondamentali della teoria dei gruppi lineari di punti: gruppi derivati, chiusi, concentrati, perfetti, densi, gruppi dedotti (cioè ottenuti prendendo gli elementi comuni ad un'infinità di gruppi), limiti superiore ed inferiore. Il Cap. IV è dedicato alla potenza dei gruppi. A questo riguardo esiste una notevole differenza tra i gruppi chiusi e i non chiusi: per i primi è dimostrato che le sole potenze possibili sono quella dell'insieme dei numeri naturali e quella del continuo, mentre lo stesso non può finora affermarsi pei secondi. Però Young ha studiato certi gruppi aperti, da lui detti *ordinary inner limiting sets*, che sono costituiti dai punti interni ad un intervallo almeno di ciascun aggregato d'una serie di aggregati di intervalli, e che si comportano, per rispetto alla potenza, come i gruppi chiusi; un gruppo di questa natura si otterrebbe p. es. togliendo da un insieme chiuso un insieme chiuso in esso contenuto. Il Cap. V tratta della *grandezza* (*content*) degli aggregati. Definita la grandezza d'un insieme d'intervalli non sovrapponentisi come la somma della serie formata dalle loro lunghezze disposte in ordine decrescente, si stabilisce di intendere per grandezza d'un insieme chiuso di punti la differenza tra la lunghezza del segmento, supposto finito, che contiene l'insieme, e la grandezza d'un insieme d'intervalli scelti, ciò che sempre può farsi, in modo che i loro estremi e i punti ad essi esterni costituiscano l'insieme chiuso considerato (i *black intervals* dell'insieme, come dicono gli autori con frase espressiva). Per gli aggregati aperti v'ha

Digitized by Google

luogo a considerare la *grandezza interna*, che è il limite superiore delle grandezze degli aggregati chiusi contenuti nel dato, e la *grandezza esterna*, che è il limite inferiore delle grandezze degli aggregati d'intervalli non sovrapponentisi racchiudenti tutti i punti dell'aggregato dato. Se la grandezza esterna e l'interna coincidono, come avviene sempre per gli aggregati chiusi, l'aggregato si dice *misurabile*. Nel Cap. VI compare il concetto di ordine; si studiano i tipi d'ordine più notevoli, e si stabiliscono le proprietà delle serie ben ordinate. Il Cap. VII contiene la teoria dei numeri cardinali e ordinali di Cantor.

Col capitolo VIII si lascia lo spazio ad una dimensione per quello a due dimensioni. Dopo aver esposto in questo capitolo le ricerche di Cantor, Peano ed altri sulla corrispondenza tra i punti del piano e quelli della retta, gli autori stabiliscono nel Cap. IX il concetto fondamentale di *regione*. Essi assumono come figura piana elementare il triangolo; dimostrano che, dato un insieme di triangoli, può sempre trovarsi un insieme numerabile di triangoli avente gli stessi punti interni, e chiamano *transitivo* un insieme di triangoli se non contiene alcun insieme parziale i cui triangoli si sovrappongano soltanto a triangoli dell'insieme parziale stesso. L'insieme dei punti interni ad un insieme transitivo di triangoli costituisce una *regione*; una regione divide i punti del piano in *punti interni*, *punti esterni* e *punti di confine* (*boundary points*), e questi ultimi si dicono in particolare *punti di contorno* (*edge points*) se appartengono alla regione. La definizione esatta del concetto di regione permette di fare uno studio rigoroso di questi enti e degli aggregati da essi costituiti, e di estendere a questi ultimi le proprietà degli aggregati di intervalli. Si chiama poi *ampiezza* (*span*) d'una regione il limite superiore delle larghezze delle strisce limitate da rette parallele entro cui essa può essere racchiusa. Se un insieme di punti non denso in alcuna parte del piano ha la proprietà che, racchiudendo ogni suo punto in una regione d'ampiezza minore di ε, l'insieme di queste regioni costituisce una regione la cui ampiezza non decresce indefinitamente al tendere a zero di ε, l'insieme dato si dice *curva*. Se tra i punti di un insieme piano e quelli d'un segmento rettilineo può stabilirsi una corrispondenza biunivoca e continua, l'insieme dicesi una *curva di Jordan*, e si dimostra che questa è una curva nel senso precedente. Lo studio delle curve di Jordan occupa quasi completamente il Cap. X. Nei rimanenti capitoli XI, XII e XIII si estendono i concetti di potenza e di grandezza agli aggregati piani, e si esprime la grandezza d'un aggregato di punti nel piano e la lunghezza, convenientemente definita, d'una curva mediante integrali. Si definisce inoltre la *grandezza lineare* d'un insieme piano chiuso di punti come il limite, per $d = 0$, di $\frac{F(d)}{d}$ (quando questo limite esiste), dove $F(d)$ è la grandezza dell'insieme dei cerchi di diametro d aventi per centri i

Digitized by Google

punti dell'insieme dato. Questa definizione conduce al paradosso curioso, che vi sono aggregati di archi di curve di Jordan (p. es. di archi circolari), la cui grandezza lineare è maggiore della somma degli archi, ed altri la cui grandezza lineare è infinita.

Una breve appendice serve a completare alcuni punti del testo, ed una lista di più che 300 titoli presenta al lettore una bibliografia completa dell'argomento.

Segnaliamo infine gli esempi interessantissimi, circa 50, sparsi per tutto il volume; la costruzione di tali esempi non è, come si sa, la parte più facile della teoria degli aggregati, mentre poi è solo collo studio di casi particolari che possono chiarirsi certi punti delicati di essa.

Noi dobbiamo pertanto essere grati ai coniugi Young per avere, senza risparmiare studio nè fatica, spianata la via a chi vorrà coltivare una delle più belle teorie che vanti l'analisi moderna.

G. Vivanti.

J. Tannery, *Leçons d'algèbre et d'analyse à l'usage des élèves de mathémathiques spéciales*. Paris, G. V. 1905, in-8 gr., p. VII-423. [Prezzo fr. 12.—]. T. II, p. 636, 1906 [Prezzo fr. 12.—].

Indice.

T. I. Cap. I. Numeri irrazionali. Calcolo con radicali. Esponenti frazionari, negativi e irrazionali. Cap. II. Polinomi. Cap. III. Divisione dei polinomi. Cap. IV. Frazioni razionali. Cap. V. Massimo comune divisore Cap. VI. Numeri immaginari. Cap. VII. Studio dei polinomi a coefficienti e variabile immaginari. Cap. VIII. Disposizioni e permutazioni. Formula del binomio. Cap. IX. Equazioni lineari. Cap. X. Determinanti.

T. II. Cap. XI. Serie. Cap. XII. Funzioni di una variabile reale. Cap. XIII. Derivate. Cap. XIV. Serie di funzioni Cap. XV. Applicazioni allo studio di una funzione, alla separazione ed al calcolo delle radici d'un'equazione. Cap. XVI. Equazioni algebriche. Cap. XVII. Notazione differenziale, curve piane. Cap. XVIII. Nozioni di calcolo integrale.

Estratto dalla prefazione.

« Io mi sono sforzato di redigere queste lezioni in uno spirito analogo a quello dei Programmi della classe di matematiche speciali, quali furono fissati nel 1904, in seguito ad un accordo fra i ministeri interessati. Mi sono applicato, per quanto ho potuto, di rendere le cose visibili, di evitare le sottigliezze e l'abuso del formalismo, di eliminare le proposizioni particolari, che interessano soltanto i curiosi, o le generalità senza applicazioni, finalmente di spingere le teorie sino alla realizzazione numerica.

Digitized by Google

Tuttavia, quando mi fu forza di sopprimere certi ragionamenti, indispensabili quando si voglia dimostrare un teorema in modo pienamente rigoroso, credetti mio dovere di avvertirne il lettore e segnalargli le relative difficoltà o lacune. Io ho orrore di un insegnamento il quale non sia sempre sincero: il rispetto per la verità è la prima, se non la sola, lezione di morale che possa trarsi dallo studio delle scienze. Certamente vi sono dimostrazioni che non sono rigorose, eppure sono ottime, perchè lasciano nella mente un'immagine incancellabile, che si vede contemporaneamente alla corrispondente proposizione e la cui chiarezza basta a guidare nelle applicazioni; se esse presentano qualche lacuna, bisogna saperlo, anzi è bene sapere dove essa esista. Tanto nella vita pratica quanto nella speculazione, importa di distinguere quello che si capisce con certezza, quello di cui si è ragionevolmente convinti e quello che si crede; conviene distinguere le cose che si posseggono completamente da quelle che si possono usare sotto certe condizioni.

Io non avevo nè lo spazio nè le cognizioni necessarie per indicare dappertutto in modo sicuro la figliazione storica delle idee; io non potei fare della storia e me ne duole. All'infuori di qualche nome consacrato dall'uso, ho evitati i nomi propri; l'abitudine di annettere un nome ad ogni proposizione mi sembra un abuso che nulla ha di comune con la storia. Anche quando tale abitudine è consacrata, essa non è esente da inconvenienti; è deplorevole che uno studente non conosca Descartes che per la regola dei segni, Newton che per il metodo d'approssimazione o la formola del binomio e che egli sia tentato di considerare Rolle come un matematico della grandezza di Descartes o Newton. Io non ho nemmeno citati, benchè fossero eminenti geometri, gli autori delle dimostrazioni o dei miglioramenti a dimostrazioni anteriori: spesso non mi sarebbe neppure riuscito il distinguere fra i ricordi di letture e quelli di conversazioni da me avute con maestri, colleghi o discepoli. Non potendo farlo sempre, preferii farlo mai.

Non avendo citato alcuno debbo tanto più scusarmi di avere spesso rinviato il lettore alla mia *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*. Quest'ultimo libro fu scritto con preoccupazioni del tutto differenti da quelle che mi dominavano redigendo le attuali *Leçons*. In esso mi proposi di presentare le cose sotto una forma astratta, con perfetto rigore logico: tale rigore è indispensabile quando si vuole penetrare in certe regioni della scienza, nelle quali chi volesse farne a meno rischierebbe di commettere i più gravi errori; questi non devono temersi, almeno nello stato attuale della scienza, nelle applicazioni delle matematiche, e non è male, cominciando, di non lasciarsi paralizzare dal terrore di cadervi: però alcuni lettori possono desiderare conoscere la fine di un ragionamento o il seguito di una teoria: ora è questo eventuale desiderio che io volli soddisfare... »

Digitized by Google

NOTIZIE.

ONORANZE AD ULISSE DINI. — La Facoltà di Scienze della Università di Pisa ha preso l'iniziativa di una sottoscrizione per commemorare degnamente il XL anniversario della nomina di U. Dini a professore in quell'Ateneo, anniversario che ricorre addì 16 Ottobre 1907. Ove - come non v'ha dubbio - tale sottoscrizione dia per risultato una somma cospicua, verrà istituito un premio periodico intitolato dall'illustre onorando. Chi intende partecipare a questa solenne pubblica attestazione di stima a chi con le opere e l'insegnamento tanto contribuì ad accrescere il nostro patrimonio scientifico diriga (non oltre il 30 Aprile p. p.) la propria offerta (nonchè le eventuali richieste di schiarimenti) al Comitato organizzatore composto dei Professori M. Canavari, E. Bertini e O. Nicoletti, tutti dell'Università di Pisa.

***

LO SVILUPPO DEL SIMBOLISMO ALGEBRICO DA PACIUOLO A NEWTON è il tema di una relazione di Miss Suzan R. Benedict, scritta sotto la direzione del Prof. D. E. Smith e pubblicata nel Programma per l'anno scolastico 1906-1907 del « Teachers College, Columbia Universiy, New York ». Essa contiene un compendio, più particolareggiato di quello che si legge in Troepfke, *Geschichte der Mathematik* (I Band, 1902, p. 1 e seg.), dei più antichi simboli usati dagli algebristi. Ma perchè mai la diligente scrittrice ha escluso completamente dal suo resoconto la curiosa simbolica dell'Hérigone? Il fatto che egli non abbia trovati seguaci è forse sufficente a giustificare tale bando?

***

MATEMATICA ED ESPERANTO. — Nell'ultimo Congresso internazionale degli esperantisti venne deciso di lasciare all'iniziativa individuale la cura di preparare e proporre dei vocabolari tecnici della nuova lingua, intendendo che la revisione e l'approvazione definitiva dovesse essere deferita ad una futura Commissione scientifica internazionale. Ora per quanto concerne la matematica un sistema di nomenclatura venne immaginato e pubblicato da R. Bricard sotto il titolo *Matematika terminaro kaj krestomatio* (Paris, Hachette, 1906; prezzo cent. 0,75); ma l'A. non ritenendolo definitivo invita tutti coloro che trovano da apportarvi modificazioni e correzioni di volergliele comunicare.

Cogliamo quest'occasione che ci si offre per segnalare a coloro che s'interessano alla questione dell'adozione di una lingua ausiliare universale l'articolo *Eine Weltsprache oder drei?* pubblicato da

Digitized by Google

L. Couturat in un numero recente della *Deutsche Revue*, come replica ed in confutazione al discorso inaugurale del celebre filologo Diels; ivi si trovano, fra l'altro, notizie piene d'interesse sui progressi ed i risultati dell'Esperante.

***

Rivista di scienza. – È questo il titolo di un periodico di prossima pubblicazione, il quale si propone di trattare, colla collaborazione di autori italiani e stranieri, le questioni d'ordine generale relative alle varie scienze e ai loro rapporti, rimanendo obbiettiva ed imparziale rispetto ad opposte tendenze. « Nata dal desiderio di coordinare il lavoro proseguito in campi diversi del sapere e di agevolarne la sintesi, la *Rivista* domanda agli studiosi che, senza scapito del tempo da loro impiegato nella via sicura della ricerca analitica, vogliano discutere sulle sue colonne le questioni generali del proprio ramo di scienza ed esporne i risultati più interessanti in una forma largamente accessibile ». Accanto agli articoli originali e alle monografie trattanti temi che appartengono alle scienze fisiche, biologiche, psicologiche, sociali (noti il lettore l'esclusione delle matematiche) troveranno posto discussioni pedagogiche e larghe analisi di opere separate e di periodici.

Della *Rivista* uscirà, oltre l'edizione italiana, ove gli articoli saranno in italiano od in francese, un'edizione internazionale con articoli anche in tedesco od inglese. Il comitato di redazione è così costituito: G. Bruni, A. Dionisi, F. Enriques, A. Giardina, E. Rignano: ne è segretario il Dott. Giuseppe Jona (Milano, via Aurelio Saffi, 16) a cui si deve rivolgersi per quanto concerne la redazione.

***

Biblioteca scolastica. — E. Treves. Elementi di aritmetica, sistema metrico e nozioni di geometria, secondo i programmi ufficiali per la preparazione agli esami di proscioglimento e maturità per la III e IV elementare. Con oltre 250 esercizi e con prefazione di S. Ortu-Carboni. Genova, 1906.

S. Ortu-Carboni. — Aritmetica pratica. Vol. II: Rapporti e proporzioni. Radici quadrate e cubiche. Sistemi di misure; forme complesse. Applicazioni: regole del tre, di catena, di ripartizione, di miscuglio e d'alligazione; interesse semplice e composto, scadenza media; annuità ed ammortamenti. Per uso delle scuole secondarie inferiori e delle scuole medie di commercio; pag. 190, 8°, Milano, Trevisini, 1907.

Digitized by Google

A. Conti. — Elementi di aritmetica razionale ad uso degli allievi delle scuole normali, coi programmi vigenti per l'insegnamento dell'Aritmetica nelle scuole elementari, seguiti da speciali istruzioni e consigli didattici. III ed. Bologna, Zanichelli, 1907.

E. J. Edwardes. — The elements of plane geometry. London, E. Arnold, 1906.

C. V. Durell. — Elementary problems papers. London, E. Arnold, 1906.

British Association Meeting in South Africa, 1905. Discussion at Johannesburg on the teaching of elementary Mechanics, which took place on August 29 th. 19 1905, in Section A. Edited by John Perry. London, Macmillan, 1906.

P. Ross. — Elementary Algebra for the use of higher grade and secondary school Part I. London, Longmans, Green and Co., 1906.

***

Sussidi bibliografici per la ricerca scientifica. — A facilitare e diffondere la conoscenza dei numerosi scritti pubblicati separatamente dagli istituti d'istruzione superiore della Germania, a partire dal 1887, la Biblioteca Reale di Berlino dà fuori un *Jahresverzeichniss der an den Deutschen Universitäten erschienenen Schriften* (Berlin, Asher und Co.). Tale pubblicazione corrisponde al *Jahresverzeichniss der Schweizerischen Universitätschriften*, che esce regolarmente a partire dal 1887, e al *Catalogue des thèses et écrits académiques* che il Governo francese pubblica ogni cinque anni, a partire dal 1884. La stessa biblioteca di Berlino pubblica poi un *Jahres-Verzeichniss der an den Deutschen Schulanstalten erschienenen Abhandlungen* (Berlin, Asher und Co., a partire dal 1889), destinato a dar notizia dei lavori inseriti nei Programmi di scuole medie. A periodi più lunghi si riferisce il *Systematische Schulverzeichniss* di Klussmann (Leipzig, Teubner) di cui esistono quattro volumi, ognuno dei quali abbraccia la letteratura di cinque annate, dal 1876 al 1900. Per l'Austria-Ungheria un'impresa somigliante fu assunta dal Prof. Bittner, il quale, a partire dal 1874, pubblicò a Czernowitz tre volumi, che abbracciano tutti i lavori scolastici usciti fino al 1905. Finalmente la ben nota Casa antiquaria Gustav Fock di Lipsia (a cui conviene rivolgersi per l'acquisto di dissertazioni e programmi) da diciotto anni pubblica un *Bibliographischer Monatsbericht ueber neu erschienene Schul-und Universitat schriften* (Prezzo dell'abbonamento annuo Mk. 3,50), ove sono indicate tutte le memorie recenti, disposte in ordine di materie; il vol. XVII, recentemente compiuto, contiene 4532 titoli, di cui 235 relativi alle scienze esatte.

Digitized by Google

TEMA PROPOSTO DAL POLITECNICO DI DARMSTADT (riservato agli studenti): « Se si estende il metodo di Gauss pel calcolo delle radici positive di un'equazione trinomia ad equazioni con quattro termini, si debbono distinguere tre casi: Equazioni con una, due e tre varizioni di segno. In virtù del teorema di Cartesio le equazioni del primo tipo hanno una sola radice positiva, quelle del secondo due o nessuna, finalmente quelle del terzo tre od una. Quando venga raggiunto il massimo numero di radici positive nei due ultimi casi si può decidere mediante criteri semplici, che servono di punti di partenza pel calcolo delle radici. Applicando tali criteri e servendosi delle tavole costruite da Gundelfinger per le equazioni trinomie, trattare completamente almeno un esempio per ciascun tipo di equazioni quadrinomie ». Premio Mk. 70. Scadenza 1° Maggio 1907.

DIE KULTUR DER GEGENWART. — È questo il titolo di una grandiosa opera enciclopedica diretta dal Prof. P. Hinneberge, di cui la Casa Teubner ha cominciata la pubblicazione. Il primo volume di essa tratta « Die allgemeinen Grundlagen der Kultur der Gegenwart » e dovrebbe trovarsi nella biblioteca di qualche persona colta; fra i collaboratori di esso troviamo un egregio matematico, il Prof. von Dyck, che vi contribuì con un interessante articolo sopra « Die naturwissenschaftliche Hochausbildung ».

NUOVI MODELLI MATEMATICI. — La serie XXXII di modelli recentemente pubblicata dalla Casa M. Schilling, comprende i seguenti apparati: I. Un nuovo circolo ellittico, inventato dal Prof. Rohn. — II. Apparato mobile ideato dal Prof. E. Kötter per illustrare il noto teorema di Dandelin sui fuochi delle coniche. — III. Nuovo apparato per descrivere le coniche servendosi del succitato teorema di Dandelin, inventato dal Prof. Hildebrandt. — IV e V. Confini poledrici di due solidi regolari a quattro dimensioni, del Dr. R. Gaetschnberger. — VI. Modello in gesso della superficie di 6° ordine luogo dei centri delle corde della curva d'intersezione delle due superficie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{s^2} + \frac{z^2}{t^2} = 1;$$

tale superficie ha per equazione

$$d^{10}\, x^2\, y^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - e^{10}\, x^2\, z^2 \left(\frac{x^2}{g^2} + \frac{z^2}{i^2} - 1\right) - \\ - f^{10}\, y^2\, z^2 \left(-\frac{y^2}{h^2} + \frac{z^2}{k^2} - 1\right) = 0;$$

il modello di essa fu costruito per consiglio dei Professori Finsterwalder e Voss dal Dr. K. Böhmenlander.

Bestonzo Pietro, Gerente

Ciriè — Stabilimento Tipografico G. CAPELLA — Ciriè

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

ANNO X. — **Aprile, Maggio e Giugno** — 1907.

A. GARBASSO

PROBLEMI DELLA SCIENZA

(*a proposito di un libro di* FEDERIGO ENRIQUES [1])

§ 1. - Il Prof. Giovanni Vailati, in un suo notevole saggio « *De quelques caractères du mouvement philosophique contemporain en Italie* » [2], ha richiamato l'attenzione del grande pubblico sul contrasto singolare che si verifica in Italia, fra i rappresentanti professionali della cultura filosofica e tutta una schiera di pensatori, difformi sempre e molte volte ostili all'indirizzo di quei primi.

Mentre i filosofi ufficiali tendono sempre più ad isolarsi e ad evitare studiatamente ogni occasione di contatto coi loro colleghi delle altre nazioni, i secessionisti, matematici di carriera o fisici, o comunque, giovani colti e liberi dalle pastoie delle piccole scuole e e delle vecchie dottrine, tengono invece l'anima aperta alle grandi correnti e al soffio vivificatore del pensiero contemporaneo.

L'osservazione è acuta, e meritava senza dubbio di essere formulata; ma il fatto non è così strano, come a prima vista potrebbe parere. E si giustifica anzi con lo sviluppo gigantesco delle scienze nell'epoca moderna.

La filosofia è stata e pretende di essere una sintesi dei resultati e e nello stesso tempo una critica dei metodi, che coronano e informano l'indagine scientifica; è quanto dire che in nessun caso potrà fare opera filosofica utile chi non conosce, per propria esperienza, come il sapere si formi e come progredisca.

I grandi filosofi del passato, da Platone e Aristotele fino a Cartesio e a Leibniz, furono essi stessi uomini di scienza, uomini dunque che avevano contribuito con le loro forze migliori all'incremento di

---

(1) F. ENRIQUEZ, *Problemi della Scienza* (Bologna, Zanichelli, 1906; un volume in-8, di pagine IV - 593, L. 10).

(2) *Revue du Mois*, III, 162, 1907.

Digitized by Google

quelle dottrine, che si studiavano di ordinare in una sintesi suprema. Le leggi del pensiero non mutano; adesso come nel passato per generalizzare utilmente bisogna conoscere i fatti singoli, e per discorrere del metodo bisogna, prima, saperlo applicare.

Cambiate radicalmente, da Galileo in poi, le condizioni della ricerca scientifica, instaurato per l'opera incessante della fisica matematica un nuovo concetto del valore delle teorie, mutata persino l'attitudine nostra davanti ai postulati primi della geometria, il commento e la riproduzione delle dottrine filosofiche classiche può costituire opera di erudito, ma non di pensatore.

La sana e viva filosofia ritorna per diritto naturale agli uomini di scienza. e non può dolere a questi se dall'altra parte, con ogni cura pietosa, ancora i morti seppelliscono i morti.

§ 2. - Il regime di specializzazione ad oltranza, che vige nelle università italiane, dove il passaggio da cattedra a cattedra è ostacolato con tutta una serie di provvedimenti ingegnosi, ha impedito fin qui che gli scienziati nostri prendessero nella formazione delle nuove dottrine tutta la parte, che il diritto e il dovere segnavano. Ma fortunatamente l'energia e l'elasticità del genio latino allentano a poco a poco le maglie burocratiche, e un sintomo gradito di reazione e di rinascita possiamo indicare oggi nel nobile volume del prof. Federico Enriquez sui *Problemi della Scienza*. Il chiaro geometra dell'Università di Bologna ha raccolto infatti in questo suo libro un materiale ponderoso, riassumendo le quistioni più importanti, che lo sviluppo della scienza suggerì negli ultimi decenni, e illustrandole di volta in volta con vedute originali.

Apre il volume una bella *Introduzione* (p. 1-80), nella quale mi piace segnalare, come specialmente notevoli e suggestive, le pagine dedicate alla critica dei problemi, che possono formare oggetto di ricerca legittima. Lo studio dei problemi irresolubili richiama fra tutti il massimo interesse, distinguendo il nostro A. i quesiti, che non si risolvono perchè male formulati (come ad esempio la quadratura del circolo), dagli altri, la cui irresolubilità dipende dalla richiesta che riesce contraria ad una legge bene accertata della natura (quali sarebbero i moti perpetui di prima e seconda specie). Distinzione sottile e, salvo errore, personale all'Enriquez.

Il *secondo capitolo* (pag. 81-151) incomincia con un dibattito su la critica della realtà e della conoscenza. Se la ristrettezza dello spazio non lo impedisse riuscirebbe assai interessante un confronto fra le idee esposte in queste pagine dall'Enriquez e le altre che formano oggetto del mirabile articolo del Boltzmann: *Ueber die Frage nach der objektiven Existenz der Vorgänge in der unbelebten Natur*. Se il fisico appare alle volte più completo e più persuasivo, il geometra

Digitized by Google

non è però meno interessante, e la vince talora in sottigliezza e in profondità.

Vorrei fare ad ogni modo un piccolo appunto, di forma piuttosto che di sostanza, ad una affermazione dell'Enriques, relativa al processo psicologico e al metodo col quale si costituiscono le teorie.

« Il processo di formazione dei concetti, — scrive l'Enriques, — « si può allargare enormemente, aggiungendo agli oggetti reali degli « *enti fittizi*, a fine di spingere più innanzi certe associazioni, e di aiu- « tarne la visione immaginativa. A tale finzione non si può porre a « priori limite alcuno, ma deve esigersi che, allo sviluppo delle teorie « in questo senso, corrisponda una critica opportuna ».

« La conoscenza teorica così proseguita, non si riferisce più ad « un insieme di rapporti reali, verificabili dall'esperienza; accanto « al mondo *fisico* di questa, essa crea un mondo immaginario, *meta-* « *fisico*, al di là di ogni esperimento possibile, e pensa l'uno e l'altro « come due parti non distinte (se pure l'una *visibile* e l'altra *invisibile*) « di una medesima realtà ».

Si può avvertire a questo proposito che il carattere *metafisico* degli *enti fittizii* é di sua natura provvisorio; perchè i moti nascosti riescono determinati non appena si conoscano le masse. La quale osservazione del resto tocca anche un famoso teorema del Poincarè.

§ 3. - Nel *Capitolo* terzo (pag. 153 - 259) sono discussi i problemi della logica pura, e quelli in particolare che si riferiscono alla definizione, ai postulati e agli assiomi.

La prima parte, relativa alle definizioni reali, nominali, implicite, ecc., si può considerare come un ottimo riassunto dei resultati ottenuti in questi ultimi tempi dai logici matematici italiani della scuola del Peano, ai quali resultati l'Enriques stesso ha portato un contributo notevole e pratico, nel suo libro magistrale su la geometria proiettiva.

La seconda parte non è meno interessante e il paragrafo, su la *Compatibilità dei postulati di una teoria*, merita un cenno speciale, come saggio caratteristico di attitudine speculativa e di senso pratico squisito. Pregi del resto che informano anche tutte le pagine rivolte all'applicazione della logica.

§ 4. - Il *Capitolo quarto* (pag. 261 - 347) è dedicato alla geometria, e consta di due sezioni, che contemplano rispettivamente il significato reale di codesta scienza e l'acquisto psicologico dei concetti geometrici.

Mi propongo di esaminare altrove taluni problemi, ai quali l'Enriques accenna nel paragrafo *Sul nuovo nominalismo di H. Poincaré*,

Digitized by Google

quelli, propriamente, relativi all'importanza delle esperienze ottiche nella formazione dello spazio; qui mi accontenterò invece di accennare con piena lode alle pagine che trattano delle geometrie non euclidee e non archimedee.

La possibilitá di queste dottrine ha dato luogo fra gli incompetenti a tutta una serie di equivoci, che è bene vedere chiariti alla fine da chi è padrone sicuro dell'argomento.

Un cenno esplicito meritano in fine per la loro originale bellezza i due paragrafi nei quali l'A. procura di collegare da una parte lo spazio tattile e la geometria metrica, dall'altro lo spazio visivo e e la geometria proiettiva.

§ 5. - E veniamo così al *Capitolo quinto* (pag. 349 - 448), che è tutto una critica dei principî e delle nozioni più importanti della meccanica. I primi paragrafi del quale capitolo, in cui si scruta sottilmente l'origine e la natura del concetto del tempo, costituiscono una novella prova delle singolari attitudini metafisiche dell'Enriques. Badiamo che la parola ***metafisiche*** è intesa qui nel suo migliore e più nobile significato, e nella mente di chi scrive vorrebbe suonare come un elogio; in realtà la maggior parte dei nostri uomini di scienza ha perduto di vista da assai tempo certe questioni elevate, abbandonandole pur troppo fra mani inesperte. Che le cose cambino é un bene, e lo si deve dire ben forte.

Molto acute sono anche le considerazioni che l'Enriques svolge sul concetto della massa, procurando di giustificare la definizione classica di Newton; al quale proposito mi sarà lecito però di avvertire le difficoltà didattiche inerenti a questo procedimento del nostro A. Come si potrebbe parlare di gruppi agli scolaretti del liceo, o magari agli studenti dell'università, a quelli in particolare, che dedicarono i loro anni migliori ai nuovi corsi tanto opportuni su la cultura ellenica?

§ 6. - Nel *Capitolo sesto* (pag. 449 - 580) i concetti fondamentali della Fisica vengono sottoposti a loro volta ad un esame accurato. Discorre anzitutto l'Enriquez della nozione di quantità e delle misure, e analizza i due tipi di meccanismo; cartesiano e newtoniano.

« Nell'indirizzo propriamente cartesiano si cerca di ridurre i dati « intensivi agli estensivi, per cui la rappresentazione quantitativa si « ottiene immediatamente, in rapporto alle sensazioni visive: in questo « senso dunque si domanda una *spiegazione delle forze*. All'opposto « il tipo newtoniano accoglie le forze come azioni elementari tra le « particelle dei corpi, nel numero dei dati primitivi, e cerca di misu- « rarle e di sottomettervi la spiegazione di altri dati estensivi, in « ispecie vuole *spiegare i legami* per mezzo delle forze ».

Digitized by Google

Sono due forme infatti che anche al presente tengono il campo, e se ne potrebbero additare degli esempî caratteristici nelle esposizioni della meccanica di Hertz e di Boltzmann.

Con queste idee direttive procede l'A. ad un esame sommario, ma denso di pensiero e di cognizioni sicure, delle teorie principali su la termodinamica, su l'ottica e su l'elettrologia.

Chiude un paragrafo relativo al valore dei modelli meccanici e delle equazioni.

§ 7. - Ponderoso ho detto da principio il libro dell'Enriques, ma lo si potrebbe con altrettanto diritto chiamare poderoso. É documento infatti di uno spirito profondo e di una cultura formidabile, del quale e della quale giova sperare che debbano essere benefici gli effetti, malgrado i sottili provvedimenti delle nostre leggi e la tendenza specialistica dell'ambiente scientifico italiano.

RECENSIONI ed ANNUNZI.

EUGENIO BERTINI. — *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità.* — Pisa, Enrico Spoerri, 1907; pp. VI + 426 (Prezzo L. 14).

La Geometria degli spazi a più dimensioni, sorta verso la metà dello scorso secolo per varie vie e per opera dei più disparati investigatori, è venuta a mano a mano rivelando la sua grande importanza, e per i nuovi e svariati problemi che suggerisce, e per i poderosi strumenti di ricerca che offre alla stessa Geometria dello spazio ordinario, ed anche soltanto come mezzo efficace di rappresentazione. In particolare, quel ramo di Geometria iperspaziale che pone a base il gruppo delle trasformazioni proiettive, o il gruppo più ampio delle trasformazioni birazionali, e che fu inaugurato in modo sistematico col noto lavoro del VERONESE, *Behandlung der projectivischen Verhältnisse...* (Math. Ann., 19, 1882), ha ricevuto nell'ultimo ventennio uno sviluppo rigoglioso, segnatamente in Italia, dove è penetrato ben presto nell'insegnamento universitario, e conta oggigiorno numerosi cultori, sia nell'indirizzo puramente geometrico, sia in quello algebrico-geometrico, e sia in quello funzionale.

Il prof. BERTINI, che, come fu uno dei primi tra noi ad entrare

Digitized by Google

nel nuovo ordine di studî, così nelle lezioni alle Università di Pavia e di Pisa ha ripetutamente esposte le varie parti della teoria (1), con la pubblicazione, per litografia, delle lezioni dettate nel 1898-99 all'Ateneo pisano, aveva fatto nascere grande speranza che tra non molto egli avrebbe presentato l'importante argomento, con tutti i più essenziali contributi recati dalle ultime ricerche, in un'opera organica, della quale era vivo e generalmente sentito il desiderio. Questo desiderio viene ora soddisfatto nel modo migliore col libro di cui ci apprestiamo a dar notizia. Il quale è bensì concepito con particolare riguardo alla Geometria proiettiva, svolta con metodo algebrico-geometrico, ma contiene ancora, disposti con fine criterio di opportunità, taluni concetti e teoremi pertinenti alla Geometria delle trasformazioni birazionali, ed in un'estesa Appendice (di 50 pagine circa) parecchi ne porge che son fondamentali per gli studi di Geometria sopra una curva algebrica.

A conseguir maggiore rapidità e ad evitar le discussioni circa l'introduzione degli elementi immaginarî, la teoria vien presentata fin dal principio quale interpretazione di nozioni e teoremi algebrici; epperò lo spazio S_r vien definito non già per mezzo d'un conveniente sistema di postulati (che permettano poi il passaggio alla rappresentazione mediante coordinate), ma come totalità dei gruppi ordinati di $r+1$ numeri finiti e non tutti nulli, del resto reali o complessi, purchè si ritengano identici due gruppi, i cui numeri omologhi differiscano soltanto per un medesimo fattore di proporzionalità.

Definiti similmente gli spazi lineari subordinati dell'S_r e dello spazio duale Σ_r (che ha per *punti* gl'*iperpiani* del primo), se ne stabiliscono, nei primi due Capitoli, le mutue relazioni e le proprietà fondamentali, relative specialmente alle operazioni di proiezione e sezione, se ne dà la rappresentazione analitica mediante un sistema di coordinate omogenee sovrabbondanti (del *Grassmann*), e si trovano le relazioni (quadratiche) che legano queste cordinate.

Fra le diverse estensioni date di noti teoremi di S_3 è specialmente da segnalarsi quella con cui si chiude il 1° Capitolo, e che si riferisce ad un concetto qui posto, credo, per la prima volta. Premesso che due o più spazî lineari *appartengono* ad un S_c (loro spazio *congiungente*) quando questo è lo spazio lineare di minima dimensione che tutti li contiene, mentre *si tagliano* in un S_i (loro *intersezione*) quando questo è lo spazio di massima dimensione che sia da tutti contenuto, l'A. dice che uno spazio S_k ha *posizione regolare* rispetto a più altri S_l, S_t, ... allorchè lo spazio a cui appar-

(1) Lo scrivente ricorda con gratitudine un corso sulla Geometria della retta, tenuto dal BERTINI a Pavia nel 1884-85, in gran parte secondo la geniale veduta del KLEIN, largamente sviluppata dal SEGRE nella sua Dissertazione appena allora comparsa.

Digitized by Google

tergono le sue intersezioni con questi è l'intersezione di S_k con lo spazio congiungente S_l, S_t, ...; e dimostra (per induzione) una formola (che avrà notevole applicazione nel Capitolo XI), che dà in ogni caso la dimensione dello spazio congiungente più dati spazî, non appena si conoscano, insieme con le loro dimensioni, anche quelle degli spazi, in cui essi si tagliano a due a due, a tre a tre,..., e si suppongano soddisfatte per le posizioni di tutti codesti spazi certe determinate condizioni di regolarità. Nel caso più semplice di due soli spazi S_h, S_k, che appartengano ad un S_c e si taglino in un S_i, risulta la nota formola fondamentale

$$h + k = c + i \ (^1).$$

I tre Capitoli successivi son dedicati ad uno studio diffuso e profondo della proiettività tra due spazî, distinti o sovrapposti (*omografia* o *collineazione*, oppure *reciprocità* o *correlazione*, secondo che ha luogo tra i punti dell'uno ed i punti ovvero gl'iperpiani dell'altro, distinzione essenziale soltanto se i due spazi sono sovrapposti): argomento di alta importanza non meno per l'Analisi che per la Geometria. Codesto studio viene iniziato per via geometrica, partendo da una definizione che è naturale estensione di quella data dallo STAUDT per le forme di 2ª e 3ª specie, dicendosi un S_r ed un S'_r proiettivi quando tra gli S_0, S_1,..., S_{r-1} del primo e gli S'_0, S'_1,..., S'_{r-1} del secondo si ha corrispondenza biunivoca tale, che se un S_i giace in un S_j, il corrispondente S'_i giace nel corrispondente S'_j, e inversamente, e quando inoltre un S'_1 e un S'_1 omologhi sono proiettivi. L'ultima condizione, aggiunta alla definizione dello STAUDT, è resa necessaria da ciò che, inclusi nella trattazione gli elementi immaginarî, vuolsi evitar di cadere sulle corrispondenze che il SEGRE ha studiato col nome di *antiproiettività* (2).

Di qui, e dal fatto che un'omografia non identica tra due S_r sovrapposti non può avere più di $r+1$ punti uniti indipendenti (non posti cioè ad $r+1$ ad $r+1$ in un iperpiano), si traggono vari semplici ma notevoli teoremi sulla deducibilità di due spazi omografici l'uno dall'altro per mezzo di *prospettività*, ossia in sostanza per via di proiezioni e sezioni, e su diverse maniere di determinare un'omografia o una correlazione.

Stabilito poi che dal punto di vista dell'Algebra le proiettività altro non sono che sostituzioni lineari tra le coordinate, si esaminano

(1) Essa trovasi già in GRASSMANN, *Die lineale Ausdehnungslehre*, Leipzig 1844 (2ª edizione 1878), § 125; *Die Ausdehn.*, Berlin 1862, n. 25 = Ges. Werke, her. von F. ENGEL, Leipzig, 1¹ (1894), p. 208-9 e risp. 1² (1896), p. 21.

(2) Del resto non tutte le condizioni indicate nella definizione sono tra loro indipendenti (p. 46-47): così si vede subito esser sufficiente che l'ultima si verifichi per un S_1 e un S'_1 omologhi particolari.

Digitized by Google

più da presso le sostituzioni a determinante nullo, e se la caratteristica di tal determinante è $r-h+1$ (con $h \geq 1$), si dice che la projettività è *singolare*, di *specie h*. Si prova allora l'esistenza di un S'_{h-1} e di un S_{r-h} (*singolari*), tali che d'un loro punto qualsiasi l'omologo è indeterminato (risp. in tutto l'S_r o in un S'_h passante per l'S'_{h-1} singolare), e se ne trae profitto per porre le equazioni della proiettività sotto una forma canonica semplicissima, la quale mette in luce che le projettività singolari della stessa specie h (del pari che le non singolari) tra spazi distinti sono projettivamente identiche (in altre parole, che una tal projettività non possiede invarianti assoluti).

Per due spazi omografici sovrapposti, la ricerca fondamentale è quella dei punti (o iperpiani) uniti. Se, riferiti i due spazi alla stessa piramide fondamentale ed allo stesso punto unità, sono

$$(1) \qquad \rho x_i = \sum_k a_{ik} y_k \qquad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

le formole dell'omografia (non singolare), le coordinate dei punti uniti si hanno dalle

$$\rho x_i = \sum_k a_{ik} x_k ,$$

da cui segue:

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} a_{00} - \rho & a_{01} & \ldots & a_{0r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r0} & a_{r1} & \ldots & a_{rr} - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Il problema è dunque ricondotto allo studio di questa equazione, di grado $r+1$ in ρ. Se essa ha m radici distinte $\rho^{(1)}, \ldots, \rho^{(m)}$, ed è $r - h^{(i)} + 1$ la caratteristica del determinante $D(\rho^{(i)})$, si ha:

$$(2) \qquad h^{(1)} + \ldots + h^{(m)} \leq r + 1,$$

ed i punti uniti si distribuiscono in m spazi lineari, tra loro indipendenti (teorema di Segre), di $h^{(1)} - 1, \ldots, h^{(m)} - 1$ dimensioni, detti *fondamentali*, e, dualmente, gl'iperpiani uniti formano m stelle indipendenti, pure di $h^{(1)} - 1, \ldots, h^{(m)} - 1$ dimensioni, che si dicono risp. *coniugate* a quegli spazi. Seguono alcuni eleganti teoremi (pur dovuti al Segre), che dànno le relazioni degli spazi con le stelle fondamentali, e tra gli altri questo, che le punteggiate formate da due punti qualunque corrispondenti nella data omografia e dagli m punti in cui la loro congiungente taglia i sostegni delle stelle fondamentali, son tutte proiettive tra loro e ai fasci formati da due iperpiani corrispondenti nell'omografia inversa e dagli m iperpiani che dalla loro intersezione proiettano gli spazi fondamentali di punti risp. coniugati. Emerge da esso che l'omografia ha $m-1$ invarianti assoluti indipendenti, rappresentati dai rapporti delle radici dell'equazione $D(\rho) = 0$: proprietà di cui l'A. dà pure una dimostrazione algebrica

Digitized by Google

diretta, la quale insegna di più che, eseguendo sulle x e y delle (1) una stessa sostituzione lineare a modulo non nullo, il determinante $D(\rho)$ e il suo trasformato hanno gli stessi divisori elementari. Che non esistano altri invarianti assoluti, si dimostra in seguito, quando si stabilisce il teorema che esprime condizioni necessarie e sufficienti perchè due omografie siano proiettivamente identiche: teorema, come provasi alla fine del Cap. IV, equivalente a quello celebre del WEIERSTRASS, che dà condizioni necessarie e sufficienti perchè due date coppie di forme bilineari si possano trasformare l'una nell'altra con sostituzioni lineari.

Per gli sviluppi precedenti, e per altri sui quali sorvoliamo, è di capitale importanza la distinzione delle omografie in *generali* e *particolari*, secondo che nella (2) vale il segno $=$ o il segno $<$, cioè secondo che gli spazi fondamentali appartengono all'S_r o ad uno spazio lineare subordinato (sono generali, per es., le omografie cicliche). Di un'omografia particolare si dimostra l'importante proprietà, dovuta al PREDELLA, ch'essa può sempre considerarsi come limite di una omografia generale, in cui gli spazi e le stelle fondamentali vengano in vario modo a sovrapporsi. Si dánno infine, per le omografie di amendue le specie, le equazioni canoniche, e varie costruzioni geometriche; e accanto alla classificazione del PREDELLA, basata sul precedente teorema, si accenna a quella del SEGRE, fondata sull'anzidetto teorema del WEIERSTRASS e però sulla considerazione dei gradi dei divisori elementari del determinante $D(\rho)$ corrispondenti alle diverse sue radici.

Per ciò che si riferisce alle correlazioni d'un S_r in sè, l'A., premesse alcune utili proprietà dei sistemi nulli (singolari e no) e dei complessi lineari di rette, pone in rilievo l'importanza che ha l'omografia *appartenente* a una data correlazione Γ, cioè quella che n'è il quadrato. Essa è permutabile con Γ, ed ha per punti e iperpiani uniti tutti e soli i punti e gl'iperpiani involutorî di Γ. Ne segue la distinzione delle correlazioni in *generali* e *particolari*, come le omografie che ad esse appartengono. L'A. si sofferma brevemente su quelle particolari correlazioni che si possono considerare come limiti delle generali (con gli stessi spazi fondamentali), ed enuncia, senza dimostrarlo, il teorema fondamentale del KRONECKER, secondo cui due correlazioni sono projettivamente identiche quando e sol quando sian tali le omografie ad esse appartenenti.

La considerazione delle polarità (che nel Cap. V si provano essere, insieme coi sistemi nulli, le sole correlazioni involutorie di un S_r in sé) conduce nel modo più spontaneo a trattare delle quadriche e dei loro fasci (Cap. VI e VII). Definita, col SEGRE, una quadrica come specializzata h volte quando abbia un S_{h-1} doppio, la polarità conduce subito a porne l'equazione sotto forma canonica (contenente i

Digitized by Google

soli quadrati delle coordinate), dalla quale risulta che tutte le quadriche generali, oppure specializzate uno stesso numero di volte, sono projettivamente identiche. Partendo ancora dalla polarità, si studiano gli spazi lineari tangenti ad una quadrica, mentre per la ricerca e lo studio di quelli giacenti sulla medesima si ricorre pure alla proiezione stereografica, approfondendo sopratutto il caso di r dispari, e facendone applicazioni alla ordinaria Geometria della retta (complessi e congruenze lineari, complessi lineari in involuzione, coordinate di KLEIN, teorema di HALPHEN sul numero delle rette comuni a due congruenze algebriche). Il Cap. VI si chiude con un cenno della generazione d'una quadrica con stelle reciproche.

La teoria dei fasci di quadriche, in particolare la loro classificazione, si fonda sopra un teorema del WEIERSTRASS, relativo ad un fascio di forme quadratiche a determinante non identicamente nullo, il quale può enunciarsi dicendo esser necessario e sufficiente, perchè due quadriche siano proiettivamente trasformabili in altre due, che siano proiettivamente identiche le due omografie prodotti risp. delle polarità rispetto a quelle e delle polaritá rispetto a queste. — Il fascio determinato da due quadriche dicesi *del primo* o *del secondo tipo*, secondo che l'omografia prodotto delle polarità rispetto ad esse è generale o particolare: segue allora da un teorema già citato che un fascio del secondo tipo può sempre considerarsi (a meno forse d'una proiettività) quale limite d'un fascio del primo tipo.

Della varietà di quarto ordine ed $r - 2$ dimensioni, base del fascio, si studiano gli eventuali punti doppi e gli spazi lineari e quadratici; e delle proprietà trovate si trae partito per la determinazione di tutti i possibili casi di un fascio in S_3, e per un breve cenno sui complessi quadratici di rette dello S_3 medesimo. — Da ultimo, si considerano a parte i fasci di quadriche tutte specializzate, i quali, come si è detto, eransi dovuti escludere nell'applicazione del teorema del WEIERSTRASS.

Sono in certo modo estensioni di talune delle precedenti ricerche quelle dei Cap. VIII e IX, risp. dedicati alle ipersuperficie e alle varietà algebriche di S_r. Delle prime — totalità dei punti le cui coordinate omogenee annullano una forma algebrica, a coefficienti costanti, reali o complessi — si espongono le generalità relative alle intersezioni, ai punti multipli, agli iperpiani tangenti, alla classe, alla teoria della polarità, ed alla generazione con sistemi lineari reciproci; e, come esempio, se ne fa, molto opportunamente, applicazione allo studio dell'ipersuperficie cubica V_3^3 di S_4 dotata di 10 punti doppî, che è stata oggetto di note ed eleganti ricerche del SEGRE e del CASTELNUOVO. Codesto studio vien condotto dapprima geometricamente, considerando la V_3^3 come luogo delle ∞^2 rette che si appoggiano a quattro piani indipendenti (epperò, per un teorema del SEGRE,

Digitized by Google

ad un quinto piano, che risulta del tutto determinato dai primi quattro), poscia per via algebrica, mostrando l'identitá della V_3^3 con la ipersuperficie cubica rappresentata dall' equazione $y_1^3 + \ldots + y_3^6 = 0$, dove le y_i sono coordinate omogenee sovrabbondanti legate dall'identità $y_1 + \ldots + y_6 = 0$.

Difficoltà molto maggiori oppone fin dagl'inizî lo studio delle varietà algebriche in generale: difficoltà che, come è risaputo, son giá rilevanti nel caso più semplice delle ordinarie curve sghembe. Accogliendo la definizione generale data dal KRONECKER nei classici *Grundzüge e iner arithmetischen Theorie der alg. Grössen* (Journ. für Math., 92, 1881 = Werke, her. von K. HENSEL, Leipzig 1897, 2, p. 237), e da cui ha preso le mosse anche il SEGRE nella sua *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (Ann. di mat., (2), 22, 1894), l'A. chiama *varietà algebrica* l'insieme dei punti di S_r, le cui coordinate soddisfanno un sistema di date equazioni algebriche, nelle quali possono anche comparire dei parametri indeterminati. Se la varietá si compone di parti aventi diverse dimensioni, un teorema del KRONECKER insegna che ciascuna può rappresentarsi staccatamente dalle altre, ond'è che l'A. nel seguito può limitarsi alla considerazione delle varietà V_k di data dimensione k. Più tardi, ammesso l'altro teorema del KRONECKER che afferma l'identità delle V_{r-1} con le ipersuperficie, si dimostra che ogni V_k (con $k < r - 1$) può aversi come completa intersezione di $r + 1$ ipersuperficie al più, e però può rappresentarsi con equazioni algebriche (al più in numero di $r + 1$), *contenenti le sole coordinate* (teorema pur dovuto al KRONECKER).

Basandosi su queste proposizioni, l'A. stabilisce con ragionamenti geometrici vari importanti teoremi, in parte nuovi, intorno all'intersezione d'una V_k con uno spazio lineare, alla projezione della varietà da un siffatto spazio, agli spazi lineari tangenti a V_k ed alla totalitá ∞^{2k} delle sue corde, delle quali si fa la distinzione in *proprie* ed *improprie*: distinzione che ne porta con sé una analoga per i punti doppi della varietà.

L'A. accenna pure alla rappresentazione — utile per tante ricerche — di una totalità di V_k d'un certo ordine con i punti d'uno spazio conveniente; e dalla analoga rappresentazione per aggregati di più punti scelti risp. in altrettanti spazi, vien condotto a trattare delle corrispondenze algebriche tra due varietá, in particolare delle corrispondenze razionali e birazionali tra due V_k (distinte o no). Ciò gli porge occasione di soffermarsi sulle corrispondenze (m, n) tra due curve razionali, e d'introdurre il concetto di *genere* d'una curva, definendolo dapprima aritmeticamente per le curve piane irriducibili dotate di sole singolarità ordinarie [1], ed estendendolo poi alle curve

[1] Il caso d'una curva qualunque è considerato nel secondo Cap. dell'Appendice.

Digitized by Google

di S_r mediante il teorema di RIEMANN, che vien stabilito con la dimostrazione dello SCHUBERT (Math. Ann.. 16, 1880).

Tornando ad una V_k, si prova come possa sempre riferirsi birazionalmente (p. e. con una projezione da un generico S_{r-k-1}) ad una ipersuperficie di un S_{k+1} (proposizione di capitale importanza per lo studio della Geometria sopra una varietà), e se ne deduce per la V_k la rappresentazione analitica (*monoidale*), con la quale l'HALPHEN ha estesa la nota rappresentazione monoidale delle curve sghembe dovuta al CAYLEY.

Dei sistemi lineari d'ipersuperficie trattano i due Cap. successivi, che sono tra i più notevoli del libro, e costituiscono il migliore avviamento allo studio della Geometria sopra una varietà algebrica. Dopo un cenno sul *coniugio* (*apolarità*) di due sistemi lineari d'ipersuperficie risp. luogo e inviluppo, son stabiliti alcuni criterî, che permettono di affermare, sotto certe condizioni, la linearità d'un dato sistema algebrico d'ipersuperficie; mentre la considerazione delle *varietà basi* d'un sistema lineare (formate dai punti comuni a tutte le ipersuficie di questo) conduce ad un notissimo teorema dell'A., di cui è corollario la proprietà, così feconda di applicazioni, che l'ipersuperficie generica d'un sistema lineare non possiede punti multipli fuori delle dette varietà.

Esistono però nel sistema ipersuperficie dotate di punto doppio, e il luogo dei loro punti doppî (indeterminato se la dimensione del sistema supera r) è la *jacobiana* del sistema, cui si perviene anche in altri due modi, estendendo proprietà ben note del piano e dello spazio ordinario.

Il rimanente del Cap. X si aggira intorno ai concetti di sistemi riducibili o no, e semplici o composti, ed è in gran parte il frutto di ricerche precedenti dell'A., che qui vengono completate e raccolte con efficace unità. Un sistema lineare è *riducibile* quand'è tale la sua ipersuperficie generica; ed è *semplice* o *composto*, secondo che le sue ipersuperficie passanti per un punto generico hanno in comune, fuori delle varietà basi, quel solo oppure altri punti. Nel secondo caso, ogni ipersuperficie del sistema è costituita di varietà V_t^ρ d'un certo ordine ρ e d'una certa dimensione t (≥ 0), il cui insieme — *congruenza lineare* per $t > 0$, *involuzione d'ordine* ρ per $t = 0$ — è ∞^{r-t} e tale che per un punto generico di S_r ne passa una sola: il sistema dicesi *composto* con la congruenza lineare o con l'involuzione. Sussiste allora la proprietà, che un sistema lineare riducibile, privo di parti fisse, è composto con un fascio (e inversamente). — Quanto ad una condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema lineare sia composto con una congruenza lineare, la si ottiene sotto forma molto semplice introducendo il concetto di *grado* del sistema, come numero (sempre finito e ≥ 0) delle intersezioni variabili di r iper-

Digitized by Google

superficie generiche del medesimo: essa consiste infatti nell'essere il sistema di grado zero. Un'altra forma che le si può dare conduce alla notevole conseguenza che la jacobiana d'un sistema lineare ∞^r è indeterminata quando e sol quando il sistema sia composto con una congruenza lineare. L'A. studia più da vicino il caso d'un sistema lineare composto con una congruenza lineare di S^t; e dà infine la nozione di *serie lineare* di V_{k-1} giacenti sopra una V_k.

Il Cap. XI s'ispira ad alcune vedute, di cui la prima origine va cercata in un lavoro del NOETHER (Math. Ann., 15, 1879), ma ch'ebbero dapprima adeguato sviluppo, per i sistemi lineari di curve piane, in una Memoria del CASTELNUOVO (Mem. della R. Acc. di Torino, (2), 42, 1891), ed ormai sono di continuo uso in tutte le ricerche sulla Geometria delle trasformazioni birazionali. Ad esse serve di fondamento l'idea, semplice quanto feconda, di partire, nello studio d'un sistema lineare, non dalla considerazione di tutte le sue varietà basi, ma da quella soltanto di un gruppo delle medesime, con le rispettive multiplicità (*gruppo base*), dicendosi che il sistema (d'ordine n) è *completo* o *incompleto* rispetto al gruppo base, secondo che consti o no di tutte le ipersuperficie d'ordine n aventi nei punti del gruppo le fissate multiplicità. Offrono, in generale, maggiore interesse i sistemi completi, poiché si dimostra che ogni sistema incompleto è *contenuto totalmente* in uno ed un solo sistema completo (nel senso che le ipersuperficie del primo sono anche ipersuperficie del secondo).

I risultati, che l'A. stabilisce trattando successivamente i casi di $r = 2, 3$, e poi, per induzione, quello di r qualunque, sono tre, e si riferiscono al problema, difficile quanto importante, della determinazione della *postulazione* del gruppo base, cioè del numero delle condizioni indipendenti imposte da codesto gruppo, per valori di n abbastanza elevati, alle ipersuperficie generiche del sistema; a certi sistemi completi deducibili da un dato nel modo che tra poco si dirà; ed alla sezione d'un sistema completo con un iperpiano generico.

Per la postulazione k si trova l'espressione:

$$k = k_0 \binom{n+r-2}{r-2} + k_1 \binom{n+r-3}{r-3} + \ldots + k_{r-3}\,(n+1) + k_{r-2},$$

dove $k_0, k_1, \ldots . k_{r-2}$ sono costanti dipendenti unicamente dal gruppo base, ed anzi soltanto risp. dalla V_{r-2} base, dalle V_{r-2} e V_{r-3} basi, ..., da tutte le varietà basi. Essa non differisce che formalmente da quella che HILBERT ha assegnato per la cosidetta *funzione caratteristica di un modulo* nell'importante memoria *Ueber die Theorie der algebraischen Formen* (Math. Ann., 36, 1890). Il procedimento tenuto dal BERTINI per determinarla nel caso di $r = 3$ trovasi in un lavoro del CASTELNUOVO (Ann. di mat., (2), 25, 1897), ed è esposto dal nostro A. sotto forma alquanto diversa, suggeritagli dall'estensione al caso di r

Digitized by Google

qualunque: estensione tutt'altro che ovvia e di cui egli dichiara (in nota alla pag. 256) di aver avuto comunicazione dal SEVERI.

Per n abbastanza alto — eguale o superiore ad un conveniente numero l — la dimensione ρ_n del sistema (e quella dei sistemi successivi di ordini $n+1$, $n+2$, ..., completi rispetto al medesimo gruppo base) è data dalla *formola di postulazione:*

$$\rho_n = \binom{n+r}{r} - 1 - k,$$

e in tal caso il sistema dicesi *regolare;* mentre dicesi *irregolare* o *sovrabbondante* nel caso contrario ($n < l$). Sussistono allora i due teoremi seguenti: 1) dato, con n abbastanza alto, un sistema lineare completo d'ipersuperfice Φ^{n+1} d'ordine $n+1$, il sistema lineare di minima dimensione che contiene tutte le ipersuperficie d'ordine $n+m$ composte di ogni Φ^{n+1} e di ogni ipersuperficie irriducibile d'ordine $m-1$ o di ogni iperpiano $(m-1)$ — plo, è il sistema completo e regolare d'ordine $n+m$ definito dallo stesso gruppo base; 2) un sistema lineare completo, d'ordine abbastanza alto, è segato da un iperpiano generico in un sistema completo e regolare (rispetto al gruppo base sezione del dato).

Il Cap. termina con l'esame d'un caso particolare della prima questione, il quale è anche notevole perchè si connette con un altro problema di molta importanza così per l'Algebra come per la Geometria: quello della rappresentabilità di una forma come combinazione lineare di più altre. Si tratta di determinare, per una ipersuperficie F di ordine n comunque dato, la postulazione di una varietà Φ_{r-h} di $r-h$ dimensioni, irriducibile o no e dotata di singolarità qualunque, ma priva di parti multiple, nell'ipotesi ch'essa sia l'intersezione di h ($\leq r$) ipersuperficie di ordini arbitrari $n_1, \ldots n_h$. A tal fine, dette $F_1 = 0, \ldots, F_h = 0$ le equazioni omogenee di queste ultime, si considera il sistema lineare di ordine n:

$$A_1 F_1 + \ldots + A_h F_h = 0, \tag{3}$$

dove $A_1, \ldots, A_h$ sono forme d'ordini $n-n_1, \ldots, n-n_h$, i cui coefficienti son pensati come parametri variabili. Se si riesce ad assegnare la dimensione k di questo sistema, si potrà asserire che la richiesta postulazione è $\binom{n+r}{r} - 1 - k$, purchè si dimostri che il passaggio di F per Φ_{r-h} importa ch'essa può rappresentarsi nella forma (3) (la proprietà inversa è evidente). Questa dimostrazione è stata data dal SEVERI, ed è qui riprodotta dall'A., mentre la determinazione di k, pur dovuta al SEVERI, è qui resa più semplice con l'applicazione di una formola del Cap. I, di cui già si è discorso.

Negli ultimi quattro Capitoli l'A. si volge allo studio delle curve

Digitized by Google

razionali e delle superficie irriducibili d'ordine $r-1$: curve e superficie, benchè di natura particolare, d'interesse notevolissimo e per le eleganti proprietà di cui godono e per le molteplici ricerche in cui intervengono.

Per le prime, espresse le coordinate del punto corrente come funzioni razionali d'un parametro, si mostra anzitutto (col LÜROTH) come si possa, occorrendo, trasformare razionalmente il parametro in un altro che sia in corrispondenza biunivoca coi punti della curva. Stabilito poi il teorema fondamentale che ogni curva razionale è proiezione d'una curva razionale *normale* (1), si espongono alcune proprietà di queste ultime curve, indicandone una doppia generazione projettiva e la rappresentazione analitica canonica. Questa pone in evidenza che tutte le curve razionali normali di S_r sono proiettivamente identiche; inoltre che ciascuna può trasformarsi nella varietà de' suoi iperpiani osculatori per mezzo di una correlazione involutoria, che è una polarità o un sistema nullo secondo che r è pari o dispari (teorema di CLIFFORD). Infine la proiezione è ancora usata per la deduzione di alcune curve razionali speciali, e per un cenno della cosidetta *involuzione fondamentale* e di altre involuzioni in cui questa è contenuta.

Le superficie irriducibili V_2r-1 d'ordine $r-1$ appartenenti ad S_r sono razionali e normali, ed anzi, per un teorema di DEL PEZZO, che l'A. dimostra ed estende nel Cap. XIV, sono soltanto le rigate razionali normali (compresi i coni), quando se ne escluda, per $r=5$, la *superficie di* VERONESE, della quale diremo più avanti. Dalle loro proprietà possono farsi dipendere quelle di tutte le rigate razionali, poichè si dimostra che ogni rigata razionale d'ordine $r-1$ di un $S_{r'}$, per $r>r'$, è projezione di una V_2r-1 rigata di S_r. A tali V_2r-1 rigate è tutto dedicato il Cap. XIII: segnatamente ad uno studio diffuso intorno alle *curve direttrici* (secanti ogni generatrice in un punto) e alla conseguente classificazione (projettiva) delle rigate razionali normali in ispecie, secondo l'ordine minimo d'una tal direttrice: alle equazioni canoniche delle V_2r-1 di data specie, a una doppia generazione projettiva delle medesime (2), ed alla loro rappresentazione sopra un piano. Tutto ciò viene illustrato con l'esempio della rigata cubica dello spazio ordinario, della quale son determinate, sul piano rappresentativo, le possibili famiglie di curve algebriche (che, col CLEBSCH, si caratte-

(1) Una varietà appartenente ad S_r dicesi *normale* per questo spazio allorchè non può aversi per proiezione da una varietà dello stesso ordine appartenente ad uno spazio di maggior dimensione.

(2) Codesta generazione, e altre analoghe (come quella che accennammo per le curve razionali normali) rientrano tutte in una proprietà generale dovuta al VERONESE, che trovasi in fine del Cap. XIII.

Digitized by Google

rizzano mediante i valori di certi due numeri), nonchè, col CREMONA, le linee asintotiche (che sono algebriche, razionali e del quarto ordine).

Nel Cap. XIV, premesse alcune importanti osservazioni intorno alla rapresentazione d'un sistema lineare di curve piane per mezzo d'una superficie di uno spazio conveniente — rappresentazione che riconduce lo studio delle proprietà del sistema invariabili per trasformazioni birazionali a quello delle proprietà *proiettive* della superficie imagine — si considera più da presso la superficie del quarto ordine appartenente ad S_5 che prende nome dal VERONESE, e che vien definita come la superficie (normale) imagine della totalità delle coniche di un piano. Basta ancora a caratterizzarla ciascuno dei seguenti teoremi: *a*) essa e le sue projezioni son le sole superficie contenenti ∞^2 coniche; *b*) essa è l'unica superficie di S_r (con $r > 4$), non cono, i cui piani tangenti s'incontrino a due a due (teorema di DEL PEZZO); *c*) è l'unica superficie di S_r, non cono, priva di punti doppi apparenti (teorema di SEVERI). — Projettandola da una retta in S_3, risulta una superficie di STEINER, una rigata cubica o una quadrica, secondo che la retta l'incontra in nessuno, in uno o in due punti, epperò segue da *a*) il teorema di DARBOUX, che le superficie dell'ordinario spazio contenenti ∞^2 coniche sono soltanto le tre dianzi nominate.

Dal fatto (conseguenza del primo dei due citati teoremi di DEL PEZZO) che ogni sistema lineare completo ∞^r ($r > 2$) di curve piane razionali è birazionalmente equivalente ad uno d'ordine $r - 1$ con punto base $(r - 2)$ — plo od a quello di tutte le coniche del piano, si deduce che una superficie di S_r a sezioni iperpiane razionali é una rigata razionale, o la superficie di VERONESE, o una projezione di questa, da punti esterni, in S_4 e in S_3. In particolare si ha il teorema del PICARD, che le superficie di S_3 a sezioni piane razionali sono soltanto le rigate razionali e la superficie di STEINER. Lo stesso è pure corollario d'un altro notevole teorema (comprendente anche quello del DARBOUX), che fu enunciato dal KRONECKER, e di cui alla fine del Cap. XIV è riprodotta la dimostrazione dovuta al CASTELNUOVO: una superficie algebrica irriducibile di S_3, che dai piani di un sistema ∞^2 venga tagliata in curve riducibili, è rigata oppure la superficie di STEINER.

Lo studio della superficie di VERONESE è ancora proseguito nel Cap. XV (ed ultimo), riprendendone, per approfondirla, la primitiva rappresentazione con le coniche d'un piano, sulla via seguita in due lavori del VERONESE e del SEGRE, dov'è fondamentale la considerazione di due coniche conjugate (apolari). L'A. ne trae occasione di mostrare come la projezione da una retta fornisca in modo semplice ed elegante le principali proprietà della superficie di STEINER, e come la superficie di VERONESE possa con vantaggio farsi intervenire pur nello studio

Digitized by Google

delle quartiche piane, in un noto indirizzo segnato dal SEGRE e dal CAPORALI.

Dei tre Capitoli in cui è divisa l'Appendice, il 1° contiene, partendo dalla definizione analitica (con serie di potenze d'un parametro), le proprietà fondamentali dei *rami* (o *cicli*, o *elementi*) delle curve algebriche di S_r, che si fanno derivare dalla nozione di multiplicità d'intersezione d'un ramo con una ipersuperficie. La maggior potenza del nuovo strumento in confronto di quelli puramente algebrici, si afferma subito nelle dimostrazioni semplici e perspicue di cui sono suscettibili i varî teoremi sulle intersezioni d'una curva con un'ipersuperficie e di più ipersuperficie tra loro, parte dei quali avevano dovuto essere senz'altro ammessi nei Cap. VIII e IX per evitare sviluppi di soverchia lunghezza. L'introduzione dei successivi *ranghi* d'un ramo nelle serie che lo definiscono conduce, con un calcolo elegante dovuto al SEGRE, ad un'analoga rappresentazione analitica del ramo, considerato come totalità de' suoi iperpiani osculatori, la quale pone in evidenza la proprietà di cui godono quei ranghi, di essere correlativi a sè stessi presi in ordine inverso, talchè la loro somma è correlativa a sè medesima. Di qui, e dalla considerazione dei ranghi d'un ramo projezione d'un ramo dato, si deduce una proposizione, notevole per la sua grande generalità, che assegna la multiplicità con cui l'S_i osculatore ad un ramo entra nella $(k\text{-}1)^{ma}$ *sviluppabile osculatrice* ($i \leqq k-1$) della curva, ossia nella varietà di k dimensioni formata dagli S_{k-1} osculatori.

Nel 2° Cap., premesso un cenno sulle trasformazioni quadratiche tra due S_r, si tratta più specialmente il caso $r = 2$, per il quale si dimostra il teorema fondamentale del NOETHER sulla riducibilità di ogni curva piana algebrica (non contenente parti multiple), mediante un numero finito di trasformazioni quadratiche, ad un'altra dotata soltanto di punti multipli ordinarî (a tangenti distinte) e privi di particolarità tangenziali. La dimostrazione è quella puramente geometrica, così semplice ed ingegnosa, che l'A. ha fatto conoscere in una Nota del 1888 (Rend. del R. Istituto Lombardo, (2) 21). La stessa serie di trasformazioni quadratiche che serve a sciogliere un punto singolare conduce a porre, ancora col NOETHER, il concetto di punti multipli *successivi* ad un dato, ed a mostrare com'esso permetta, da una parte, di esprimere sotto forma intuitiva la multiplicità d'intersezione di due curve in un punto comune e per conseguenza anche il teorema di BÉZOUT, dall'altra, di estendere a curve comunque singolari e ai loro sistemi lineari il concetto di genere e i teoremi che nei Cap. IX e XI si erano dimostrati nell'ipotesi di sole singolarità ordinarie.

Nell'ultimo Capitolo si ritorna sulle corrispondenze (m, n) tra due enti razionali ∞^1, sopratutto, nel caso di enti sovrapposti, sul

Digitized by Google

problema di valutare la multiplicità di un elemento nel gruppo degli elementi uniti. L'A., fra altro, stabilisce, con molta opportunità, la regola dello ZEUTHEN, valida in ogni caso e fondata sulla considerazione degli ordini infinitesimali di certi segmenti rettilinei. Dimostra in seguito, anche con la maggiore estensione conferitale dall'HALPHEN, la nota e importante formola con la quale lo stesso ZEUTHEN ha esteso il teorema di RIEMANN a corrispondenze (m, n) tra due curve; e dal caso particolare in cui queste siano razionali trae una nuova espressione (dovuta al RIEMANN) del genere di una curva, mediante le multiplicità di una serie lineare ∞^1 segnata su essa. Stabilisce infine, con parecchie notevoli applicazioni, un importante sistema di r formole, valide per ogni curva algebrica di S_r (e dovute, in questa generalità, al SEGRE), nelle quali entrano il genere, i successivi ranghi della curva (ordini delle sue sviluppabili osculatrici) e quelli de' suoi rami; e termina con la deduzione delle formole del CAYLEY e del VERONESE, che legano i numeri delle ordinarie singolarità delle curve algebriche risp. di S_3 e di S_r.

Questo, in breve, il ricco contenuto del bel libro del prof. BERTINI: il quale ha saputo con rara maestria raccogliere in un numero non molto grande di pagine un materiale copioso e svariato, componendolo in armonica unità, e presentandolo sotto forma succinta, sempre improntata a grande lucidità e precisione. L'A. si è giovato, naturalmente, anche di lavori altrui, in ispecie di quelli del SEGRE; e nell'Appendice sopratutto, com'egli stesso avverte nella Prefazione, si è valso altresì degli estesi sunti manoscritti che il SEGRE elabora annualmente per i propri corsi e che mise a sua disposizione. Ma se anche si faccia astrazione da ciò che appartiene all'A. e già fu altrove pubblicato, tanti sono i perfezionamenti e tante le felici innovazioni qui introdotte (di cui solo una piccola parte potè da noi essere indicata), e con sì amorosa cura tutto il vasto argomento appar meditato fin nei più minuti particolari, che l'opera si presenta perfettamente omogenea e con fisonomia spiccatamente propria. L'elevato ideale scientifico e didattico a cui s'ispira, la profondità — che non degenera mai in pesantezza — onde i diversi soggetti son trattati, e la generalità e il rigore delle deduzioni pongono il libro tra i più notevoli di cui s'è arricchita in questi anni la letteratura matematica italiana; mentre non piccola attrattiva gli conferiscono la varietà dei temi svolti, le eleganti e ben scelte applicazioni ad enti particolari, le notizie bibliografiche sparse qua e la con savia misura, e la grande chiarezza dell'esposizione. Nè vuolsi tacere di altre qualità formali che, insieme con la correttezza dell'edizione, ne rendono comoda e piacevole la lettura, come i continui e precisi richiami al testo, l'indice diligente e minuzioso, e la numerazione dei capitoli e dei paragrafi riportata al sommo delle pagine. Scritto, come dice l'A.

Digitized by Google

modestamente nella Prefazione, con l'intento d'iniziare i giovani del secondo biennio delle nostre Facoltà matematiche agli ultimi grandi progressi della Geometria moderna, esso è destinato a rendere preziosi servigi a studenti del pari che ad insegnanti, e aggiunge nuovo lustro agli studi scientifici del nostro paese.

LUIGI BERZOLARI.

P. APPEL, *Cours de Mécanique à l'usage des élèves de la classe de mathématiques speciales, conforme au Programme du 27 juillet 1904.* Deuxième édition, Paris, Gauthier-Villars, 1905, pp. 1-493.

Nel primo fascicolo del *Bollettino* di questo anno, pp. 22-24, abbiamo brevemente esaminati i due bei libri dell'Appell e Chappuis: *Leçons de Mécanique élémentaire*, redatti in conformità dei programmi del Maggio 1902. Il nuovo volume dell'Appell, di cui ci accingiamo a fare un breve cenno, è dedicato agli studenti della classe di matematiche speciali, ed è conforme ai programmi del luglio 1904.

Basteranno poche parole, perchè sostanzialmente il nuovo corso si inspira a quegli stessi principi di cui discorremmo nella precedente recensione. E si comprende subito che, indirizzandosi a giovani già in possesso di una discreta cultura matematica, e a cui sono maggiormente famigliari i concetti e le regole fondamentali della derivazione e integrazione, l'illustre autore abbia potuto dare un maggior sviluppo analitico a certe questioni di cinematica (Parte I); le quali, pur essendo suscettibili di una trattazione affatto elementare, erano state escluse dai programmi generali.

Così troviamo qui lo studio particolareggiato del moto centrale, la dimostrazione della nota formula di Binet e la considerazione del moto elicoidale.

Le altre due parti, come nelle lezioni elementari, sono dedicate rispettivamente alla Meccanica, che in fondo comprende la Dinamica, classica del punto libero o vincolato, e alla Statica.

Le teorie classiche sono illustrate con esempi numerosi — pendolo semplice, punto attratto da un centro fisso in ragione inversa del quadrato della distanza, breve discussione del problema e dell'equazione di Kepler — e sono svolte con metodi analitici ben noti e con molta chiarezza. La Statica comprende: la teoria dei momenti, esposta per minuto con metodo geometrico; la teoria della composizione delle forze; le condizioni di equilibrio d'un sistema rigido; la teoria del centro di gravità e l'equilibrio delle macchine semplici.

Ogni capitolo del pregevolissimo libro, che può essere guida fedele e sicura dei giovani di molte delle nostre scuole, è seguito da buon numero di esercizi di cui, quasi sempre, è brevemente accennata la soluzione.

R. MARCOLONGO.

Digitized by Google

E. BLASCHE. *Vorlesungen über mathematische Statistik* (*Die Lehre von den statistischen Masszahlen*). Mit 17 Figuren und 5 Tafeln. 8° gr., p. VIII-268. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1906. (Prezzo del vol. leg. Mk. 7.40).

Non è da molto tempo che le scuole superiori cominciarono ad occuparsi di una istruzione scientificamente organizzata pei tecnici delle assicurazioni, dopo di avere riconosciuto che una così importante istituzione sociale esige assolutamente un fondamento scientifico. Fu il Politecnico di Vienna il primo istituto ad organizzare il piano di studi per la tecnica delle assicurazioni; ciò accadde nel 1893. L'A. della presente opera faceva parte della commissione che compilò il relativo programma. Che la statistica matematica dovesse essere una delle materie fondamentali, venne ammesso sin dal principio. Col mezzo di essa il futuro assicuratore viene subito posto in grado d'intendere i fondamenti, dedotti dall'esperienza, di tutti i calcoli egli sarà chiamato ad eseguire. Inoltre viene così risvegliato e svolto quel suo giudizio critico sopra siffatti fondamenti, che gli è indispensabile per aver una guida da usare quando egli stesso dovrà scegliere i fondamenti di tale specie per uno scopo determinato. Lo studio di quella disciplina lo porrà poi in grado di riconoscere in qual modo si debbano raccogliere i dati sperimentali e si possano sfruttare a scopi scientifici. Ma anche oltre questi scopi principali, la statistica matematica offre dei mezzi per comprendere esattamente i più complessi fenomeni che si presentano nei contratti di assicurazione e quindi di penetrare sicuramente nelle relative questioni.

Considerando che i lavori concernenti questo soggetto di data relativamente recente si trovano dispersi in giornali, monografie, resoconti di società, ecc. si manifesta in modo sempre più sensibile il bisogno di una esposizione completa metodica degli *Elementi* di detta scienza. Epperò l'A. del presente libro con il suo lavoro ha colmata una vera lacuna, ed egli era particolarmente indicato a far ciò, giacchè, oltre una vasta conoscenza della letteratura dell'argomento, vanta degli ampi contatti con la pratica e molti anni d'insegnamento, attributi questi di tal peso che si sarebbe tentati di dichiararli indispensabili. Quantunque tale libro si rivolga in prima linea agli studenti, pure verrà anche dai pratici festosamente accolto e utilizzato per consiglio.

Blaschke ha distribuita la materia da esporre in modo da cominciare con le totalità, che devono fornir la base per tutte le seguenti argomentazioni; egli le caratterizza tanto analiticamente quanto con quei metodi grafici, i quali grazie alla loro perspicuità, ottennero un posto stabile nella scienza e nella pratica. Segue la teoria dei vari

Digitized by Google

numeri misuratori usati per descrivere i fenomi relativi alle masse; la massima importanza viene attribuita a quei numeri che servono a descrivere i fenomeni di mortalità, sia relativi ad un'intera popolazione, si ad un gruppo di assicurandi. Egli quindi si volge alla questione fondamentale dell'intimo significato dei numeri misuratori, in particolare alla questione in qual modo si possa dedurre se un numero statistico possegga il carattere di una « probabilità »; dai risultati di siffatta ricerca dipende essenzialmente la legittimità delle induzioni dal passato al futuro. I vari tentativi, alcuni dei quali coronati di successo, per esprimere col mezzo di una formola analitica l'andamento di un fenomeno, costituiscono un altro tema trattato nel presente libro, al qual tema sarebbe forse stato opportuno di collegare l'ultima Sezione dello stesso, il quale concerne il paragone di serie di numeri statistici fra loro analoghi; l'A. ha invece posta prima una Sezione relativa ad alcune applicazioni del calcolo delle probabilità a questioni di assicurazione, ad es. quella dei limiti di perdita e guadagno da attendersi con prestabilita probabilità quella del rischio in vari tipi d'assicurazioni; ecc. In un' Appendice si trovano descritti e rappresentati i principali mezzi meccanici che vengono adoperati per ottenere delle totalità statistiche, col traforare, ordinare, contare delle carte di numeri; segue anche una piccola tavola a tre decimali del noto « integrale di probabilità » e un indice bibliografico ordinato in conformità alle Sezioni del libro.

Una quantità di cose importanti e difficili trovasi trattata in quest'opera in uno spazio relativamente breve; anche chi è famigliare con la materia trova ivi una quantità di osservazioni e giudizi, frutti delle vaste esperienze dell'autore; ed i numerosi esempi illustrativi, fondati sopra reali osservazioni, chiariscono e ravvivano l'esposizione.

Siaci lecito di raccomandare all'attenzione dell'A. le osservazioni seguenti. Per quanto riguarda il nome dato alla disciplina trattata, io penso non esservi alcuna ragione per mutarlo, giacchè esso caratterizza esattissimamente quel ramo della statistica che chiarisce i risultati dell'esperienza al lume della matematica e venne composto con lo stesso buon diritto con cui si parla di « ottica geometrica » o di « chimica fisica ». Ai metodi per paragonare le tavole di mortalità od altre tavole statistiche (argomento su cui l'A. ha scritto nel 1893 una memoria originale) l'A. dedica nuovamente lunghi sviluppi; io credo che la distinzione fra « Tafel ebnung » e « Tafel ausgleichung » a cui egli tuttora si attiene (p. 198) manchi di una base effettiva. Sotto il nome di « Tafelausgleichung » devesi, in base alla definizione data, « approssimarsi al vero fenomeno »; ora se si va più al fondo della cosa e si cerca di determinare che cosa devesi intendere per « vero fenomeno » si giungerá alla conclusione che non esiste alcun metodo di compensazione mediante cui si possa con sicurezza sistema-

Digitized by Google

ticamente conseguire un siffatto scopo. È meglio dunque attribuire ad ogni compensazione uno scopo più modesto. Raccomanderei ancora al provetto A., nel preparare una nuova edizione (che, per fermo, non si farà attendere) di volgere maggiore attenzione agli sviluppi basati sulla teoria delle probabilità (vedi ad. p. 126-7, 133-4, 140, 159, 178, 183).

Il prof. Blaschke si é da tempo acquistato una fama ben fondata di statistico pratico; grazie all'impulso da lui dato ed in parte sui piani da lui forniti vennero già compiute delle vaste ricerche di mortalità; basti in particolare citare la costruzione (omai compiuta, dopo un lavoro di cinque anni) di tavole di mortalità fondate su osservazioni di assicurati austriaci, la cui publicazione verrà presto cominciata. Ora, l'opera annunciata gli assicura per varie altre ragioni la gratitudine di molti.

E. Czuber.

H. Laurent. *La géométrie analytique générale.* Paris, A. Hermann, 1906. 8° gr., p. VII+151. (Prezzo 6 fr.).

Il libro mantiene quanto il suo titolo promette: si tratta di un trattato di geometria a n dimensioni, concepito e redatto con intenti esclusivamente analitici: a provar ciò basterebbe notare il I Capitolo, ove le funzioni circolari sono definite mediante i loro sviluppi in serie e col mezzo di questi ne sono stabilite le proprietà caratteristiche. Segue un Cap. contenente le definizioni degli enti di S_n ed uno studio particolareggiato delle sostituzioni ortogonali in tale spazio, con applicazione alla ricerca delle formole elementari della geometria euclidea metrica di tale spazio. Il Cap. III concerne lunghezze, aree, volumi, ecc.; il V (del IV parleremo poi) estende allo spazio a quante si vogliano dimensioni la teoria degli inviluppi, in particolare quella delle sviluppabili. Il successivo Cap. contiene un'esposizione di forma geometrica della teoria dell'eliminazione. Nel seguente capitolo VII viene introdotto il sistema di coordinate omegenee negli spazi lineari qualunque e viene poi esteso per raggiungere la generalizzazione completa di un noto teorema di Poisont, relativo alla costruzione delle normali a superficie algebriche, nonchè quella del teorema correlativo. Una teoria delle quadriche di S_n forma il capitolo VIII; tale teoria si presenta come una naturale estensione di quella delle curve e superficie di second'ordine che si leggono nei nostri migliori trattati di geometria analitica. Il Cap. seguente contiene applicazioni notevoli delle formole e dei concetti anteriormente esposti: richiamiamo specialmente l'attenzione dei lettori sopra la estensione e dimostrazione di un celebre teorema di Chasles relativo alle super-

Digitized by Google

ficie algebriche (v. p. 128-130). Nell'ultimo Cap. l'A. si occupa della geometria sugli spazi 3 dimensioni rappresentabili mediante equazioni della forma, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \pm x_4^2 = R^2$ e ne deduce le note formole della trigonometria sferica e le analoghe relative allo spazio iperbolico.

Da questo fedele riassunto dell'opera del Laurent emerge che essa è ricca di doti non comuni, che la rendono consigliabile a chiunque voglia famigliarizzarsi col soggetto. Sembra però che non sia stato questo il precipuo fine propostosi dall'autore, il quale invece voleva portare un nuovo contributo alla questione connessa al V postulato di Euclide (1). Che la via da lui proposta nel Cap. IV della sua opera e nell'epilogo di essa corrisponda effettivamente alla sua aspirazione nessuno può dire oggi dal momento che egli stesso pone come come chiusa al suo libro le seguenti parole:

« È possibile edificare una geometria rigorosa ne' suoi principi, chiara nella sua esposizione, senza servirsi dell'apparecchio algebrico e troppo trascendente di cui noi facemmo uso?

« Forse, perchè non possiamo prevedere quali scoperte ci riserbi l'avvenire. Ma, nello stato attuale della scienza, ciò sembra assai difficile, perchè bisognerà definire il movimento senza deformazione, al quale è collegata l'idea di numero; questa idea di numero è indipendente da ogni sistema di numerazione, perchè si tratta d'un simbolo atto a distinguere le quantità eguali fra di loro da quelle superiori od inferiori, tale simbolo può essere una forma geometrica su cui bisognerà cercare di definire l'eguaglianza e l'addizione in un modo che comporterà molta arbitrarietà e checchè s'imagini, la geometria costruenda dovrà necessariamente applicarsi ad una folla di figure differentissime, benchè aventi lo stesso nome.

« Il piano, la retta, l'angolo, la distanza dovranno essere gli invarianti del movimento senza deformazione, e si dovrá potere *dimostrare* il postulato di Euclide. La grossa difficoltá sarà la definizione dello spostamento senza deformazione ».

G. L.

Annuaire pour l'an 1907, publié par le bureau des longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars. (Prezzo fr. 1.50).

Questo volume, piccolo di mole ma rigurgitante di notizie preziose, contiene al pari dei precedenti, un immensità di informazioni inte-

(1) Notiamo che a lui sembrano essere rimaste ignote le ricerche sui principi della geometria di recente fatte in Germania (Hilbert e sua scuola) ed in Italia (Peano, Pieri, B. Levi, ecc.).

Digitized by Google

ressanti lo scienziato o l'ingegnere. Oltre alle solite rubriche, furono in esso inseriti gl'importanti articoli seguenti: Bouquet de la Grye, *Diamètre de Venus* e *Note sur la XV^e Conférence de l'Association géodésique internationale:* H. Deslandres, *Histoire des idées et des recherches sur le soleil: révélation récente de l'atmosphère entière de l'astre.* G. L.

H. Mandart. *Cours de trigonométrie rectiligne et sphérique à l'usage de l'enseignement moyen.* Namur, Ad. Wesmael-Charlier, 1904. P. VIII + 1904. (Prezzo 3 fr.).

Uno de' punti più delicati dell'insegnamento della trigonometria è l'introduzione dei segni delle linee trigonometriche; per trattarlo convenientemente la via maestra, che si spiana dinnanzi, risulta dall'introduzione del concetto di funzione e dei fondamenti della geometria analitica cartesiana, chè allora *seno* e *coseno* altro non sono che le coordinate di un punto della circonferenza che ha per centro l'origine e per raggio l'unità. Un altro metodo per conseguire lo stesso scopo è indicato nell'opera che annunciamo. Che esso sia soddisfacente dal punto di vista del rigore e possegga anche la dote di una relativa semplicità, lo riconosceranno, con noi, tutti i lettori di essa; che esso poi possa dar buoni frutti nell'insegnamento potrà dire soltanto chi ne abbia fatta esperienza diretta. Però, dato pure e non concesso, che l'esito di tale esperienza risultasse negativo, il *Cours* del prof. Mandart andrebbe egualmente raccomandato a tutti coloro che per debito d'ufficio devono insegnare la trigonometria, grazie alla sapiente architettura dell'insieme ed alla ricchezza e venustà delle svariate applicazioni fatte delle teorie classiche.

G. L.

O. Lesser. *Die Infinitesimalrechnung im Unterrichte der Prima.* Mit 30 Figuren im Text. 8°. p. VI + 121. Berlin, O. Salle, 1906. (Prezzo Mk. 1.60).

Questo libretto rappresenta un nuovo tentativo (cfr. *Bollettino*, IX, 1906, p. 50-51) fatto per introdurre nelle scuole secondarie gli elementi del calcolo infinitesimale (1), poichè esso riproduce in

(1) Una prova del favore che va trovando in Germania l'idea di insegnare nelle scuole medie i fondamenti dell'analisi dell'infinito ci è fornito da un insegnante liceale austriaco, il Dr. Alois Lanner, il quale in un opera recente dal titolo *Neuere Darstellung der Grundprobleme der reinen Mathematik im Bereiche der Mittelschule* (Berlin, O. Salle, 1907) ha trattato anche delle operazioni, differenziazione ed integrazione.

Digitized by Google

compendio l'insegnamento fatto una volta dall'autore nell'ultimo anno di corso di un'« Oberrealschule » (Istituto tecnico) di Francoforte s. M. Esso è caratterizzato dalla scelta, come fondamenti di tutto il calcolo differenziale, del concetto di funzione e della sua rappresentazione geometrica; tale metodo, se agli occhi di un analista intransigente potrà sembrare una deplorevole concessione, sarà approvato da tutti coloro che sanno come nulla sia più atto delle figure a risvegliare e tener desta l'attenzione dei principianti ed a rendere intuitive molte cose che rischierebbero di riuscire inintelligibili.

L'opuscolo che annunciamo consta di tre parti. La prima si divide a sua volta in due capitoli: uno contiene una particolareggiata esposizione del concetto di funzione e della sua rappresentazione mediante curve piane, l'altra insegna come l'uso delle linee guidi alla risoluzione approssimata delle equazioni numeriche (ad es. le equazioni trinomie $x^n + px + q = 0$ si possono risolvere con tutta la desiderabile esattezza mediante le parabole $y=x^n$). Anche la seconda parte è formata di due capitoli: in uno trovansi le regole del differenziare e la dimostrazione del legame che esiste fra derivata di una funzione e tangente di una curva; l'altro è destinato a stabilire le formole di Taylor e Maclaurin e farne conoscere le note applicazioni al calcolo dei valori di espressioni di forma indeterminata e dei massimi e minimi. L'ultima parte (che, secondo noi sarebbe stato meglio collocare immediatamente dopo il I Cap. della II Parte) è consacrata alle regole d' integrazione ed alla loro applicazione a rettificazioni di curve piane, a quadrature delle aree limitate dalle stesse, alla cubatura di solidi rotondi ed alla risoluzione di alcune questioni applicate di notevole interesse (come ad es. il pendolo e le leggi di Keplero).

Emerge da ciò che il programma del corso del sig. Lesser fu scelto molto accortamente; la forma in cui è svolto è chiara e semplice; onde non si può che augurare alle fatiche dell'autore il successo che esse meritano. G. L.

S. Pincherle. *Lezioni di Algebra complementare* dettate nella R. Università di Bologna e redatte per uso degli studenti. — Parte prima. — Analisi algebrica. Bologna, N. Zanichelli, 1906, 8° gr., p. 366. (Prezzo L. 10).

Questa prima parte delle lezioni di Algebra del prof. Pincherle è dedicata alla analisi algebrica e costituisce, più precisamente, una « introduzione elementare allo studio delle funzioni ».

Della genesi del concetto di numero, delle sue leggi e delle sue successive generalizzazioni trattano i primi quattro capitoli (pp. 1-98)

Digitized by Google

i quali, pubblicati a parte due anni or sono, ottennero già il più largo successo. L'A. è sempre fedele alla concezione aritmetica dei fondamenti dell'analisi. Ma ispirandosi ad un equilibrato eclettismo di procedimenti, corregge quel carattere eccessivamente astratto, che potrebbe rendere meno opportuna, dal punto di vista didattico, la teoria rigidamente formale. In particolare egli definisce il numero irrazionale secondo le vedute del Dedekind e accosta al concetto di *sezione* quelli di *classi contigue* e di *successione convergenti*; per modo che alternando ingegnosamente l'uso di codesti tre procedimenti di determinazione, riduce la teoria ad un disegno, la cui semplicità e la cui chiarezza non sembrano ammettere ulteriori perfezionamenti.

In altri quattro Capitoli (pagg. 99-206) l'A., dopo aver posto nitidamente le nozioni fondamentali sugli aggregati sul concetto di limite, ne fa applicazione alla teoria degli algoritmi infiniti (serie, prodotti infiniti, frazioni continue); ed è degno di menzione l'elegante procedimento, con cui egli, in base ad un semplice lemma sui sistemi di infinite successioni, determina il prodotto di due serie.

Dopo di ciò l'A., negli altri sette capitoli (pag. 207-862), dà una teoria elementare delle funzioni. Stabilito il concetto generale di funzione nel senso del Dirichlet, ne definisce i caratteri generali (limite superiore o inferiore, punti del WEIERSTRASS) e, introdotta l'ipotesi della continuità ne sviluppa le prime conseguenze. Applica quindi codeste nozioni alle funzioni razionali intere, per le quali studia l'interpolazione e la divisibilità; e, definita formalmente, la derivata, stabilisce la formola del Taylor. Estende il concetto di derivata alle funzioni non razionali, e per le funzioni derivabili in generale ma più particolarmente per le razionali dà i soliti teoremi sulla variazione. Da ultimo introduce le serie di potenze, di cui verifica le proprietà entro il cerchio di convergenza, deducendone ivi, in base al già ricordato lemma sulle infinite successioni, la formola del Taylor e la derivabilità per serie; e dei resultati così stabiliti si vale per lo studio dettagliato delle funzioni trascendenti elementari (funzioni circolari e iperboliche, serie esponenziale, funzioni binomiale e logaritmica).

L'A. ha deliberatamente e opportunamente escluse le inutili ridondanze di materia e ha piuttosto concentrato ogni cura ed ogni studio a semplificare lo schema di ciascuna teoria e a mettere in luce, sia con l'ordinamento delle parti, sia con la scelta dei procedimenti, quella concatenazione naturale dei concetti, che è forse la prima ragione di ogni efficacia didattica. E ad alle esigenze dell'insegnamento parmi senz'altro che queste *Lezioni* rispondano sotto ogni rispetto; cosicchè esse sono ben degne di stare al fianco di quegli altri trattati, con cui l'A. nelle nostre scuole si è reso tanto benemerito dell'insegnamento della matematica.

UGO AMALDI.

Digitized by Google

NOTIZIE.

I PREMI DELL'ISTITUTO DI FRANCIA. — Nell'adunanza annuale del 17 Dicembre 1906 vennero, fra altri, conferiti, i seguenti premi:

Gran premio delle Scienze Matematiche. (Perfezionare in qualche punto importante lo studio della convergenza della teoria delle frazioni continue algebriche): diviso in parti eguali tra H. Padé, R. de Montessus, Auric. *Premio Francoeur*: E. Lemoine. *Premio Poncelet*: Guichard. *Premio del Barone de Joëst*: Demoulin.

Per gli anni venturi sono, oltre ad altri, proposti i seguenti premi:

Gran premio delle Scienze Matematiche: « Realizzare un progresso importante nello studio della deformazione delle quadriche generali » (scadenza 31 Dicembre 1907). *Premio Francoeur* (per una scoperta od un lavoro utile alle matematiche pure ed applicate). *Premio Poncelet* (per un lavoro di matematica pura). *Premio Bordin*: L'invariante assoluto rappresentante il numero degli integrali doppi distinti di II specie di una superficie algebrica dipende da un invariante relativo p, che disimpegna una parte importante nella teoria degli integrali di differenziali totali di III specie ed in quella delle curve algebriche tracciate sulla superficie. Si propone di fare uno studio approfondito di tale invariante e specialmente di investigare in qual modo se ne possa determinare il valore esatto, almeno per alcune vaste categorie di superficie » (scadenza 31 Dicembre 1908). *Premio Damoiseau* 1908: Teoria del pianeta Eros basata su tutte le osservazioni note. *Premio Binoux* 1909: Storia delle scienze. *Premio Petit d'Ormoy*: Matematiche pure ed applicate. *Premio Leconte*: Scoperta capitale sulle scienze matematiche, fisiche, ecc. inclusa la medicina.

***

A. MANNHEIM. — Con la deplorata morte di questo ben noto investigatore (avvenuta a Parigi l'11 Dicembre 1906) scomparve il più eminente fra i rari cultori che la geometria pura conti oggi in Francia. Egli era nato a Parigi il 17 Luglio 1831 ed era destinato dalla sua famiglia alla carriera militare; ed infatti gli è mentre era studente alla scuola militare di Metz che egli ideò il « Regolo calcolatore » che porta il suo nome. Le molteplici pubblicazioni geometriche da lui fatte a partire dal 1851 gli valsero la cattedra di geometria descrittiva alla scuola politecnica, che egli era destinato ad occupare dal 1859 al 1901; non meno di 44 generazioni di « polytéchniciens » furono da lui così rese famigliari con le discipline che debbono la vita a Monge, Poncelet e Chasles! Numerosissime sono le note e memorie da lui composte; tutte di notevole eleganza, alcune di un

Digitized by Google

valore così grande da assicurare ad esse ed al loro autore perenne rinomanza. Fra i suoi lavori di maggior mole ricorderemo il *Cours de géometrie descriptive de l'école polythéchnique* (1880, 1886) e i *Principes et développements de géométrie cinématique* (Paris, 1894) e ove sono raccolti e coordinati i lavori (in gran parte del Mannheim stesso) sopra questo nuovo ramo della geometria.

***

TEMA PROPOSTO DALL'ACCADEMIA REALE DELLE SCIENZE DI DANIMARCA. — « Sino dal 1865 Salmon ha stabilito per le superficie piane un principio di corrispondenza che, quando i punti di un piano si corrispondono reciprocamente, permette di assegnare i punti che coincidono con i loro corrispondenti. Più tardi tali ricerche furono estese in modo da comprendere tutti i casi ordinari in cui tutti i punti di una curva siano uniti (« curva di coincidenza ») e Schubert nel suo *Kalkül der abzälhenden Geometrie* ha radunate tali determinazioni in un più completo sistema di formole. Inoltre, nei *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (Ottobre 1906), Zeuthen ha mostrato come le formole di corrispondenza nel piano potevano estendersi ad una superficie arbitraria e che allora esse si riattaccano agli invarianti numerici delle superficie in modo analogo a quanto fa la formola di Cayley-Brill per le corrispondenze fra punti di una curva. Ma tali ricerche si possono spingere più oltre. Così, per quanto concerne il piano, importa non solo di conoscere l'ordine della « curva di coincidenza » e la classe della curva-inviluppo che a quella si connette (inviluppo delle dette rette congiungenti le coppie di punti coincidenti); ma è anche necessario di conoscere i numeri dei punti e delle tangenti singolari di tali curve per dedurne il numero dei punti del piano ognuno dei quali coincide con più di uno dei punti corrispondenti. L'estensione di tali risultati ad una superficie algebrica mostrerà ancor più chiaramente fino a qual punto una superficie sia caratterizzata dai suoi invarianti numerici. Altre questioni si presenteranno poi trattando tale questione algebricamente.

L'Accademia, desiderando incoraggiare siffatte ricerche, ricompenserà con sua medaglia d'oro. « *un lavoro che completi mediante nuovi risultati la teoria d'un piano e d'una superficie i cui punti si corrispondano reciprocamente* ». Scadenza 31 Ottobre 1908. I lavori dei concorrenti dovranno essere scritti in danese, svedese, inglese, tedesco o francese e spediti anonimi al Prof. H. G. Zeuthen dell' Università di Kopenhagen.

***

TEMA POSTO A CONCORSO DALLA SOCIETÀ OLANDESE DELLE SCIENZE DI HAARLEM: « Come debbonsi disporre p_1N sfere di raggio R_1 e p_2N sfere di raggio R_2 (N essendo un numero indeterminato) affinchè com-

Digitized by Google

plessivamente occupino il più piccolo spazio possibile? Dati p_1 e p_2, quali sono, se esistono, i valori critici del rapporto $R_1 : R_2$ tali che una leggiera variazione di tale rapporto esiga un radicale cambiamento nella disposizione delle date sfere per ottenere uno spazio minimo? Soluzioni particolari, determinazioni di limite per lo spazio richiesto; la trattazione di casi speciali o delle soluzioni pel problema analogo a due dimensioni potranno essere ritenute degne di premio purchè diano prova d'ingegno e di originalità considerevoli nell'autore ».

I lavori dei concorrenti possono essere scritti in latino, olandese, francese, inglese, italiano o tedesco, e débbono essere inviati anonimi prima del 1° Gennaio 1908 al Segretario di quella Società Dott. J. Bosscha. Il premio consiste in una medaglia d'oro, o 500 Gulden, a scelta del premiato.

***

TEMA DI CONCORSO PROPOSTO DALLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI NAPOLI. — « Esposizione sistematica delle nozioni sinora acquisite sulle configurazioni geometriche del piano e degli spazi, mettendole in relazione con la teoria delle sostituzioni e portandovi, possibilmente, qualche nuovo contributo ». Premio L. 500. Scadenza 30 Giugno 1908.

***

MATEMATICA ED ESPERANTO. — Il Sig. F. J. Vaes di Rotterdam ha formulato e sta per attuare il progetto di una pubblicazione matematica in esperanto (« Gazeto mathematika internacia ») destinata ad accogliere sia scritti originali sulle matematiche pure ed applicate, sia traduzioni in quella lingua di lavori già pubblicati in qualche altro idioma. E' aperto l'abbonamento al primo volume di tale periodico al prezzo di L. 12.50. Il relativo importo, come gli articoli da inserirsi e qualunque comunicazione relativa, deve dirigersi al signor Vaes, Rotterdam, Mathenesserlaan 290.

***

PUBBICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLE SCIENZE ESATTE [1]. — E. BORTOLOTTI, ***Carteggio di Paolo Ruffini con alcuni scienziati del suo tempo, relativo al teorema sulla insolubilità di equazioni algebriche generali di grado superiore al quarto.*** Mem. della Soc. It. delle Scienze, III, Ser., 14, 1906. (Importante collezione di documenti relativi all'in-

[1] Avvertiamo una volta per tutte che in queste notizie, ed in quelle congeneri che usciranno ne' fascicoli venturi, per risparmio di spazio non facciamo menzione degli articoli pubblicati nella *Bibliotheca mathematica* dell' Eneström, ritenendo che quest'ottimo periodico si trovi a disposizione di tutti coloro che s'interessano di storia delle matematiche.

Digitized by Google

teressante questione indicata dal titolo, con illustrazioni e commenti opportuni).

E. BORTOLOTTI, *Sulla risolvente di Malfatti. Carteggio inedito di P. Paoli e P. Ruffini.* Mem. della R. Accad. di Modena, Serie III, vol. VII, 1906. (Da alcune lettere dirette dal Paoli al Ruffini, i cui originali si trovano a Modena e che l'A. pubblica, risulta la parte che il primo ebbe parte diretta nelle ricerche dell'altro sulle equazioni di 5° grado, alle quali il Brioschi diede tanta notorietá con una sua celebre memoria).

A. FAVARO, *Serie decimasettima di scampoli galileiani.* Atti e Memorie della R. Accademia di Padova, 1906-07. (Comprende i capitoli seguenti: CXII. Ancora, e per l'ultima volta, intorno all'episodio di Gustavo Adolfo di Svezia nei racconti della vita di Galileo. CXIII. La telegrafia senza fili nel «Dialogo dei Massimi sistemi». CXIV. Una lettera di Enrico Puteano a Michele van Langren. CXV. Di una pretesa palinodia di Galileo. CXVI. Intorno ad un manoscritto di Vincenzio Viviani nella Biblioteca Marciana di Venezia. CXVII. Cenni biografici inediti intorno a Vincenzio Viviani).

A. FAVARO. *Amici e corrispondenti di Galileo Galileo.* XVIII. *Raffaello Gualtierotti.* XIX. *Giannantonio Rocca.* Atti del R. Istituto Veneto, T. LXVI. Parte II, 1906-07. XX. *Fulgenzio Micanzio,* Nuovo Archivio Veneto, t. XIII, 1907. *Galileo Galilei e Don Giovanni de' Medici.* Archivio storico italiano, sez. V. T. 39, 1907. *La invenzione del telescopio secondo gli uttimi studi.* Ivi.

Nozze Favaro-Dolfin. IV Febbraio MCMVII. Antiche vite di Galileo scritte da contemporanei, ristampate dalle originali e rare edizioni. Firenze, Barbera 1807. (Tale opuscolo, destinato a divenir presto una ricercata rarità bibliografica, si apre con l'epigrafe seguente che ne rivela la provenienza e l'occasione: «In ricordo del IV Febbraio MCMVII - buono fausto felice ad Antonio Favaro - nozze del suo Giuseppe, con la nobil fanciulla Maria dei conti Dolfin, queste singolarità bibliografiche, dedicano Isidoro del Lungo, Umberto Marchesini, Pietro Barbera, Augusto Alfani, Arturo Venturi, collaboratori suoi, alle cure letterarie e tipografiche, per l'edizione nazionale, delle opere di Galileo». Esso contiene poi le biografie di Galileo scritte da L. Allacci, G. V. de' Rossi, V. Siri e L. Crasso, e si chiude con un sonetto di G. B. Marino in lode del Galileo).

Pensieri, sentenze e motti di Galileo Galilei scelti dai discepoli e pubblicati da ANTONIO FAVARO. *Riv. di fis. mat. e scienze naturali, Febb. 1907.* (Si tratta di squarci che, non essendo stati redatti da Galileo stesso, non vennero inseritti nell'ed. nazionale; alcuni racchiudono idee profonde).

A. FAVARO, *Antichi e moderni detrattori di Galileo.* Rassegna nazionale, 15 febbraio 1907. Esauriente difesa di Galileo, basata

Digitized by Google

su documenti adunati nell'edizione nazionale delle opere di quel grande).

H. Bosmans, *L'algèbre de Jaque Peletier du Mans départie en deus livre (XVI siècle)*. Révue des questions scientifiques, Janvier 1907. (E' una lucida analisi di un'opera importante e rara, in base ad uno studio delle tre edizioni che ne vennero fatte negli anni 1554, 1560 e 1609). *Le commentaire de Gemma Frisius sur l'« Arithmetica integra » de Stifel.* Bruxelles, 1907.

E. Wiedeman, *Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften.* VII. *Ueber arabische Auszüge aus der Schriften des Archimedes über die schwimmenden Körper.* VIII. *Ueber Bestimmung der spezifischen Gewichte.* IX. *Zu der Astronomie bei der Arabern.* Sitzungsber. der phys.-med. Sezietät in Erlangen, Bd. XXXVIII, 1906. *Ibn al Haitam, ein arabischer Gelehrter.* Festschrift für J. Rosenthal, Leipzig. 1906. *Zur Physik bei den Arabern.* Jahrbuch für Photographie, 1906. *Ueber das Experiment im Altertum und Mittelalter. Vortrag.* Unterrichtsblätter f. Math. und Naturwiss, 1906.

F. Amedeo, *Giuseppe Battaglini e le sue opere.* Atti dell'Acc. Pontaniana, Vol. XXXVI, 1906.

J. H. Graf, *Zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften an der ehemalige Akademie und der Hochschule Bern.* Mitth. der Naturferschenden Gesellschaft in Bern 1906. (Con questo suo discorso inaugurale l'A. arreca nuovi contributi alla storia delle scienze esatte in Svizzera, argomento di cui da un ventennio egli si occupa).

K. Bopp, *Die Kegelschnitte der Gregorius a St. Vincentio in vergleichender Bearbeitung. Mit. 329 Textfiguren.* Abh. zur Gesch. der Mathematik, XX Heft 1907. (La presente esposizione accurata in linguaggio moderno dell'« opus magnum » del celebre Gesuita verrà senza dubbio ad aumentare gli estimatori per un autore variamente giudicato ed oggi poco conosciuto).

***

Centenario di E. Torricelli. Il 15 Ottobre 1908 ricorre il terzo centenario della nascita di Evangelista Torricelli e la città di Faenza, che gli fu patria, si prepara ad onorare degnamente uno dei più illustri suoi figli, rendendo a lui il più significante degli omaggi, quello, cioè, di pubblicarne le opere complete, seguite dal relativo carteggio scientifico. La direzione dell'importante impresa venne assunta dal Prof. Giuseppe Vassura, che già tanto si adoperò affinchè quella data memorabile fosse debitamente ricordata. Con l'augurio del più completo successo alle sue nobili fatiche, giunga a lui sin da ora l'espressione della gratitudine di tutti gli studiosi, da tempo desiderosi di conoscere nella sua interezza l'opera scientifica del celebre faentino.

Digitized by Google

***

Gustavo Bauer nacque ad Augsburg il 18 Novembre 1820 e fece nella sua città natale gli studi secondari, che finì nell'Agosto 1837; in seguito frequentò le lezioni impartite nella Scuola politecnica fondata dal Dott. Leo ed al termine del biennio 1837-38 conseguì un lusinghiero certificato. Orfano di padre e quindi esente da doveri coscrizionali, nel 1839 s'inscrisse all'Università di Erlagen, che, per ragioni di famiglia, abbandonò pel politecnico di Vienna. Ritornato ad Augbsburg nell'estate 1840, si recò a proseguire i propri studi a Berlino, attrattovi specialmente dell'alta fama di Dirichlet. In conseguenza di un esame pubblico felicemente superato ottenne nel 1841 un posto provvisorio d'insegnante nel Liceo in cui era stato istruito; nell'estate 1842 venne a Monaco per preparare la Dissertazione di laurea, che gli valse l'8 Agosto di quell'anno la dignità dottorale dall'Università di Erlangen. Bauer andò poi a perfezionarsi a Parigi; ritornato in patria nell'Aprile 1843, le difficoltà di ottenere un posto nel pubblico insegnamento lo indussero ad accettare la carica di istitutore del Principe Ghika di Rumenia, che egli doveva tenere per un decennio. Dopo un breve soggiorno in Inghilterra, ritornò a Monaco e nell'Ottobre 1857 si abilitò libero docente in quella Università. Ivi fu promosso nel 1865 prof. straordinario e quattro anni dopo ordinario; in tale ufficio rimase sino al Novembre 1900, in cui, dietro sua domanda, fu collocato a riposo; ciò non ostante, le sue ottime condizioni di salute gli concessero di continuare l'insegnamento universitario sin quasi al giorno (3 Aprile 1906) in cui serenamente si spense. Il Bauer fu egregio cultore delle matematiche pure, ma la sua fama come insegnante fu ancor superiore di quella che egli conseguì come scienziato: valgano a provarlo le feste che gli vennero fatte prima pel suo LXX e poi pel suo LXXX genetliaco; in quest'ultima occasione vennero pubblicate, per deliberazione del *mathematischer Verein* di Monaco le sue ottime *Vorlesungen ueber Algebra* (cfr. *Bollettino*, XVII, 1904, 84-86). Per maggiori notizie su l'uomo, l'investigatore ed il maestro rimandiamo alla bella necrologia del Bauer pubblicata da A. Voss nel Jahresber. der Deutsch. Math.-Ver., T. XVI, 1907, p. 54-75.

***

Dalla Pittura alla Fotografia è il titolo della Prolusione al Corso di geometria projettiva e descrittiva nella R. Università di Cagliari, detta dal Prof. Beppo Levi; come questo titolo dice, sono ivi segnalati i punti di contatto che la geometria descrittiva ebbe nelle sue origini ed ha tuttora con l'arte del disegno e la scienza dell'ingegnere.

Bestonzo Pietro, Gerente.

Cirié - Tipografia G. Capella - 1907.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

ANNO X — **Luglio-Dicembre** — 1907

La scoperta della condizione d'equilibrio d'un grave scorrevole lungo un piano inclinato

di GIOVANNI VAILATI

Nell'opera del Duhem sull'*Origine della Statica* (1), e specialmente nel secondo volume di essa, ultimamente pubblicato, le notizie che possono interessare soltanto gli storici, gli eruditi, i bibliografi assumono una parte così preponderante da mettere in qualche imbarazzo chi si proponga di districare da esse, e specificare esattamente, i contributi che l'autore apporta alla trattazione del suo principale soggetto, cioè alla storia delle idee, delle ricerche, delle scoperte, che hanno condotto alla costituzione e allo sviluppo della Statica moderna.

Tra tali contributi mi sembrano particolarmente da rilevare e da esaminare quelli che si riferiscono alla scoperta della condizione d'equilibrio di un grave scorrevole lungo un piano inclinato.

***

Una prima questione da risolvere, su questo soggetto, era quella di determinare, se, e fino a che grado, le idee, che in proposito si trovano espresse dagli autori del XIII e XIV secolo, devano essere riguardate come nuove ed originali, o se, e fino a che grado, esse siano invece da ritenere come frammenti di dottrine anteriori, o dei vestigi di teorie risalenti, per ordine non interrotto di tradizione, fino all'antichità greca.

Il carattere scolastico, anzi aristotelico, del termine tecnico: *gravitas secundum situm*, o *gravitas accidentalis*, adoperato negli scritti meccanici di Giordano Nemorario, e anche da Leonardo da Vinci,

(1) P. DUHEM, *Les origines de la Statique*. Vol. II. Paris, 1906.

Digitized by Google

per indicare quella *parte*, o, come ora si direbbe, quella *componente*, del peso di un corpo che è necessario « controbilanciare » per impedire che esso cada quando si trovi in date condizioni, o assoggettato a dati vincoli (per esempio a quello di scorrere lungo un piano inclinato), è riguardato dal Duhem come una prova che l'importante concetto da esso designato, si connetta a una trattazione della Statica derivante dalle dottrine peripatetiche.

A questa conclusione si oppone il fatto che, in nessuno degli scritti aristotelici trattanti di meccanica, a noi pervenuti, si trova traccia del termine greco che dovrebbe corrispondere alla suddetta denominazione latina. La parola greca che più si avvicina, per il senso, a quella di *gravitas secundum situm*, è invece: ῥοπή, la quale negli scritti di Aristotele, non figura che come termine del linguaggio ordinario, mentre invece assume valore di termine tecnico negli scritti di Archimede, nei quali essa è adoperata appunto per distinguere « il peso » (βάρος) di un corpo, da ciò che ora si chiamerebbe il suo « momento » rispetto a un dato asse di rotazione.

Il titolo stesso del principale scritto di Archimede sulla meccanica (περὶ ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν), tradotto poco esattamente con « *De planis aequiponderantibus* », ci offre esempio di tale impiego del termine ῥοπή. I piani passanti per il centro di gravità di una data figura, sono detti, da Archimede, dividerla in due parti di uguale ῥοπή, con che egli non intende certo dire che essi la dividono in due parti di eguale peso.

La coincidenza tra il senso attribuito dai meccanici greci alla parola ῥοπή, e quello attribuito più tardi al termine *gravitas secundum situm*, e, più tardi ancora, al termine *momento*, si trova confermato del resto anche da Galileo, p. e. nel suo scritto « *Delle meccaniche* » riprodotto dal Favaro nelle *Memorie dell'Istituto Veneto*, vol. XXVI, 1899, nonchè dal Baliani, il quale, nella prefazione alla sua opera « *De motu* » (1638), definisce il *momento* come « l'eccesso della virtù movente sopra gli impedimenti al moto ».

***

Non è senza interesse notare come, dalla suddetta determinazione del concetto *gravitas secundum situm*, risulti chiaro il senso da attribuire alla frase, continuamente adoperata dagli scrittori di meccanica della generazione anteriore a Galileo, che le velocità di caduta dei corpi sono proporzionali alla loro *gravitas secundum situm* (*gravia secundum situm velocius descendere*). Tale frase, sia che essa s'intenda applicata alle diverse velocità che assume uno stesso grave, che cada lungo piani diversamente inclinati, o in mezzi di differente densità, o comunque assoggettato a vincoli o resistenza che si oppongono al suo moto « naturale », è, in ogni modo, da interpretare come affermante

Digitized by Google

la proporzionalitá tra le forze (staticamente misurate) agenti, per un dato tempo, su di un dato corpo, e le velocità che questo rispettivamente assume. Essa è cioè da riguardare come una enunciazione di quella che, nella trattazione newtoniana della dinamica, figura come la « seconda legge del moto ».

Nella distinzione tra il peso di un corpo e la sua *gravitas secundum situm* è anche da riconoscere un primo germe di quella che, nell'ordinaria enunciazione del principio detto D'Alembert, compare indicata coll'opporre le forze *applicate* alle forze *attuali*.

***

Sebbene il piano inclinato non figuri tra le cinque « potenze » (δυνάμεις), o « macchine semplici » (la leva, l'asse nella ruota, la puleggia, il cuneo, la vite) che, nell'esposizione tradizionale della mecanica greca, sono descritte e studiate come le parti elementari di ogni meccanismo, pure, tanto da Erone quanto da Pappo, sono dedicate ad esso delle considerazioni, a proposito particolarmente del cuneo e della vite: quest'ultima concepita da loro come un cuneo « attorcigliato » attorno a un cilindro.

In quella specie di « Manuale dell'Ingegnere » greco, che è la « Meccanica » di Erone, si trova enunciata la seguente proposizione: « Qua« lunque forza, per quanto piccola, sarebbe sufficiente a muovere « qualunque corpo, comunque pesante, se il terreno (orizzontale) su « cui esso si muove fosse perfettamente liscio e se le sue rugosità non « agissero come un *apparecchio dentato* per trattenerlo, obbligando, « chi lo voglia smuovere, a sollevarlo. (1).

A combattere l'opinione (che Erone qualifica come « accettata da parecchi ») che, per trascinare un corpo, lungo un piano orizzontale, occorra esercitare uno sforzo equivalente al suo peso, Erone immagina che il corpo sia appoggiato sopra un piano perfettamente liscio, capace di inclinarsi successivamente in due versi opposti, e fa constatare come, in tal caso, la più piccola inclinazione del piano basterebbe a far muovere il corpo « perchè la tendenza naturale sua é di muoversi verso il basso, quando niente lo sostenga e non vi siano impedimenti al suo moto ».

Alla domanda, « quale forza, o quale altro peso, potrebbe essere sufficiente, per sostenere un grave scorrevole sopra un piano di data inclinazione », Erone tenta di dare una risposta solo nel caso di un cilindro che rotoli lungo il piano in questione. Egli immagina perciò condotto, per la generatrice di contatto del cilindro, un piano verti-

(1). V. pag. 54-62 del Vol II delle opere di Erone, pubblicate nella *Bibliotheca Teubneriana* (Fasc. I: ed L. Nix e W. Schmidt, 1901).

Digitized by Google

cale, e fa notare come questo divida il cilindro in due parti di cui la superiore è minore dell'inferiore. Vi è dunque (egli osserva) una porzione della parte inferiore alla quale la parte superiore fa equilibrio, e un'altra porzione, invece, che occorre ulteriormente controbilanciare per impedire che il cilindro rotoli verso il basso.

Contentandosi di questa conclusione Erone non procede, neanche in questo caso speciale, ad alcuna esatta determinazione della dipendenza tra l'inclinazione del piano e la forza che occorrerebbe applicare al cilindro per impedirgli di scendere.

Lo stesso problema è ripigliato da Pappo, ma non con maggior fortuna. Il modo stesso nel quale egli lo enuncia. (« Dato lo sforzo che occorre per trascinare un grave lungo un piano orizzontale determinare lo sforzo che occorrebbe per farlo salire lungo un piano di data incliazione ») mostra come egli non abbia tratto alcun profitto dalle considerazioni sopra esposte di Erone, che pure non dovevano essergli ignote, essendo contenute in opera di cui egli riporta interi brani.

***

Tornando a Erone è da notare un altro punto nel quale la sua esposizione sembra quasi raggiungere una corretta determinazione della condizione d'equilibrio d'un grave su un piano inclinato, ed è dove, a proposito del cuneo, egli afferma e cerca « dimostrare » che « qualunque colpo, per quanto piccolo è sufficiente per far avanzare per quanto di poco, qualunque cuneo in una fenditura in cui esso sia infisso ».

Nelle considerazioni che egli svolge a tale scopo, riguardanti il variare dell'efficacia di dati dati colpi a seconda che essi si esercitino su cunei di diverso « angolo », figura esplicitamente l'affermazione che, per fare avanzare *di uno stesso tratto*, due cunei, di angolo diverso, occorrono colpi le cui intensitá siano in un rapporto eguale a quello degli allargamenti che ciascuno dei cunei *produrrebbe* penetrando *per quel tratto*, nella fenditura in cui è impegnato.

L'oscurità e le probabili alterazioni o lacune del testo pervenutoci solo attraverso a una traduzione araba, non ci permettono di determinare in modo preciso se la suddetta affermazione sia riguardata da Erone semplicemente come un risultato dell'esperienza, e da lui come tale presupposta nei suoi ragionamenti, o se egli invece si proponga di dimostrarla coll'immaginare, come fa, che il cuneo sia scomposto in tanti altri più piccoli cuneii, aventi per « angolo » una parte aliquota dell'angolo del cuneo intero, e sui quali gl'effetti dei colpi subiti del cuneo intero verrebbero, in certa guisa a distribuirsi.

È certo, a ogni modo, che la sopra indicata dipendenza dell'efficacia di un cuneo della lunghezza del tratto per il quale esso deve essere fatto avanzare per produrre un dato allargamento della fenditura, è riguardata da Erone come un caso speciale, o una conferma, del

Digitized by Google

principio, da lui riconosciuto per tutte le macchine semplici, che cioè con esse tanto si guadagna dal lato dell'economia di forza quanto si perde dal lato dello spazio o del tempo, pei quali la forza deve essere fatta agire per ottenere un dato risultato (1).

***

Può sembrare strano che, mentre Erone e Pappo riconoscevano e formulavano esattamente, pel caso almeno dei cinque meccanismi elementari da loro considerati, quello che ora si chiama il principio dei momenti virtuali, non siano venuti nell'idea di applicare tale principio anche alla determinazione degli sforzi necessari per sostenere, o far salire, dei pesi lungo un piano inclinato.

Il Duhem propende a credere che ciò sia da attribuire alla maggior difficoltà a far astrazione, in questo caso, dall'influenza degli attriti, Le considerazioni sopra esposte di Erone sul modo di agire del cuneo della vite, non sembrano tuttavia compatibili con una tale ipotesi.

É da notare inoltre che nel caso, considerato da Erone e da Pappo, di un cilindro rotolante su un piano inclinato, l'attrito non ha molto più parte di quanto ne abbia, per esempio, pel caso della leva o delle pullegge.

Vi deve dunque esser stata qualche altra ragione, e a me pare che, dall'esame appunto dei ragionamenti soprariportati di Erone e di Pappo, risulti abbastanza chiaramente quale essa fosse. Per i meccanici greci - colla sola parziale eccezione di Aristotele, o meglio dell'Autore dello scritto sulle « *Questioni meccaniche* » a lui attribuito - la dipendenza dell'efficacia di una forza, applicata ad un dato meccanismo, dal cammino che è necessario far percorrere al suo punto di applicazione per ottenere un dato risultato, era riguardata semplicemente come un *fatto* che l'esperienza permetteva di constatare, caso per caso, per ciascuno dei meccanismi o delle combinazioni dei meccanismi da essi presi in considerazione, non mai come un principio abbastanza evidente, o abbastanza saldo per servire di mezzo per la prova, o per la ricerca, del modo di funzionare di alcun nuovo meccanismo del quale non fosse stato già prima, e indipendentemente, accertato e spiegato il modo di agire.

La ricerca teorica delle condizioni d'equilibrio di qualunque meccanismo era da essi concepita come dovente consistere essenzialmente in una riduzione, più o meno diretta, di esso, al caso della leva o di un sistema di leve. La « bilancia a braccia disuguali » (e qui non fa eccezione neppure Arislotele che tenta « ridurre » alla leva perfino il cuneo) era per essi la sola macchina tipica ideale, la sola atta a render ragione del modo d'agire di tutte le altre.

(1) Op. cit. pag. 152-153.

Digitized by Google

***

Dal suddetto pregiudizio - non meno dannoso ai progressi della meccanica di quanto non sia stato per l'astronomia quello relativo alla « perfezione » del movimento circolare - non abbiamo alcuna ragione di credere che i meccanici greci siano giunti ad emanciparsi.

Il più antico tentativo, di cui ci sia rimasta traccia, di una trattazione teorica della statica indipendente da esso si trova in quella specie di enciclopedia medioevale della meccanica che, sotto il titolo di « Trattato dei Pesi » (*de Ponderibus*), è continuamente citata e utilizzata dagli scrittori di meccanica del XIV e XV secolo - da Biagio Pelacani e Leonardo da Vinci, a Cardano e al Tartaglia - e da essi attribuita a Giordano Nemorario matematico del secolo XIII,

Dell'importanza che, a questo riguardo, è da attribuire al trattato « *de Ponderibus* », ho già avuto occasione di occuparmi in una Nota, presentata, nel 1897, all'Accademia delle Scienze di Torino. Il Duhem arriva ora, indipendentemente, e col sussidio di estese ricerche sui vari manoscritti che di quest'opera sono conservati nella Biblioteca Nazionale di Parigi, a conclusioni in parte conformi a quelle che allora era parso di potere formulare in proposito (1).

Ciò che spinse il Duhem a intraprendere le sue ricerche in questa direzione fu l'aver constatato le notevoli divergenze che, appunto sul soggetto del piano inclinato, sussistono tra le due diverse redazioni che del trattato « *de Ponderibus* », furono pubblicate nel secolo XVI, la prima a Norimberga nel 1533, col titolo « *Liber Jordani Nemorari Viri clarissimi, de ponderibus, propositiones XIII et earumdem demonstrationes multarumque rerum rationes sane pulcherimas complectens* » e l'altra a Venezia, nel 1565, su un manoscritto già appartenente al Tartaglia, col titolo: « *Jordani Opusculum de ponderositate, Nicolai Tartaleae studio correctum, novisque figuris auctum* ».

***

Nonostante le differenze segnalate dal Duhem, e di cui mi occuperò più avanti, le suddette due redazioni del trattato « *De ponderibus* » concordano in più d'un punto di cui è da rilevare l'importanza.

Ad ambedue è premessa una stessa lista di « *suppositiones* », tra le quali figura quella in cui è determinato il senso della locuzione: « *gravitas secundum situm* », il senso cioè, da attribuire all'asserzione che un dato corpo sia, in confronto ad un altro, più o meno *grave secundum situm*: « *Minus grave esse aliud alio secundum situm quando descensus alterius sequitur contrario motu* ».

Un'altra « *suppositio* » stabilisce di assumere, come misura della

(1) *Il principio dei lavori virtuali da Aristotele a Erone d'Alessandria*. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. Vol. 32.

Digitized by Google

inclinazione (*obliquitas*) di una linea di discesa rispetto a un'altra, il rapporto tra le variazioni di livello subite da un mobile che scorra, per un dato tratto, rispettivamente sull'una e sull'altra di esse: *Obliquiorem descensum in eadem quantitate minus capere de directo.*

Da tali due definizioni risulta precisato il significato della proposizione, enunciata in seguito, che la «*gravitas secundum situm*» di un corpo, che discenda lungo una data linea, è tanto più grande quanto più piccola la obliquitá della linea, cioè quanto più grande è l'abbassamento, o innalzamento, che il grave subirebbe percorrendo un dato tratto lungo essa: *Secundum situm gravius esse cujus in eodem situ minus obliqnus descensus.*

L'applicazione esplicita di questa proposizione al caso di due gravi, collegati da un filo, sostenuto da una puleggia e scorrevoli su due piani diversamente inclinati, non si trova però effettuata se non nella seconda delle due redazioni sopracitate del trattato «*De ponderibus*», cioè in quella curata dal Tartaglia.

L'altra ci presenta invece soltanto dei tentativi, abbastanza confusi, e paralogistici, di far rientrare, sotto lo stesso principio, il caso di due pesi pendenti dai due estremi di una leva, considerando le diverse «obliquità» degli archi che i loro punti di sospensione descrivono.

Questa differenza, che è la piú importante tra quelle che sussistono tra le due redazioni del «*De ponderibus*» induce il Duhem ad avanzare l'ipotesi che soltanto la prima di esse (quella cioè pubblicata a Norimberga da Pietro Apiano) rappresenti effettivamente idee di Giordano Nemorario, e che l'altra invece corrisponda a un'ulteriore elaborazione del contenuto dell'opera originaria, elaborazione che sarebbe, secondo il Duhem, da attribuire all'intervento di un ignoto Commentatore, al quale egli attribuisce il merito di avere per il primo formulata la condizione d'equilibrio di un grave scorrevole lungo un piano inclinato.

Poichè, come si è visto sopra, nella parte comune alle due redazioni figurano concetti e proposizioni alla cui enunciazione, e determinazione, non è facile assegnare alcun scopo, o motivo, all'infuori di quello consistente nella loro applicazione al caso del piano inclinato, pare a me più probabile l'ipotesi che la seconda e non la prima delle dette due redazioni sia quella che più si avvicini alla supposta trattazione primitiva da cui ambedue rappresenterebbero una derivazione, e che tale trattazione primitiva abbia subito, nell'edizione pubblicata a Norimberga, o nei manoscritti che le hanno servito di base, delle mutilazioni che sono andate a colpire proprio alcune delle sue parti più vitali.

Digitized by Google

***

La forma sotto la quale la condizione d'equilibrio di un grave scorrevole lungo un piano inclinato, figura enunciata nella edizione curata dal Tartaglia presenta tuttavia una notevole divergenza da quella che si sarebbe condotti ad aspettare in conformità alle ***suppositiones*** che vi si trovano, come si è visto, premesse alla trattazione.

In essa, infatti, per confrontare le obliquit delle linee a cui s'appoggiano i due gravi che si controbbilanciano, invece di ricorrere alla considerazione del rapporto tra le ***proiezioni verticali di uno stesso segmento***, portato prima sull'una poi sull'altra di esse, si considera il rapporto, inverso, fra i ***tratti delle due linee che corrispondono a unastessa proiezione verticale:***

Si per diversarum obliquitatum vias duo pondera descendant, fiantque declinationum et ponderum una proportio, eodem ordine sumpta, una erit utrinque virtus in descendendo. Qui il Tartaglia aggiunge per maggior chiarezza: ***Proportio declinationum dico non angulorum sed linearum ad equidistantem resecationem in qua aequaliter sumunt de directo.***

Tanto nel precedente e nunciato quanto sotto tal nuova forma, la proposizione in questione sembra quasi già accennare a quell'ordine di considerazioni da cui Stevin e Galileo dovevano poi esser condotti ad applicare, al caso del piano inclinato, il principio generale che un sistema di corpi pesanti, comunque vincolato, si mette in moto solamente nel caso che le nuove posizioni, che i vincoli a cui essi sono assoggettati permettono loro di assumere, diano luogo a un abbassamento del loro comune centro di gravit . (1).

Crema, 7 ottobre 1907. G. VAILATI.

---

(1) Questo principio si trova enunciato esplicitamente per la prima volta dal TORRICELLI nel suo trattato « *De motu* » (1644). Come da esso si sia andato gradatamente sviluppando, per opera specialmente del WALLIS e di GIOVANNI BERNOULLI, quello che ora si chiama il « principio dei lavori virtuali », ho già avuto occasione di accennare in altro scritto (*Per la preistoria del principio dei Momenti virtuali* in *Bibliotheca mathematica*, T. VIII, della 3ª Serie, 1908).

Digitized by Google

RECENSIONI ed ANNUNZI.

B. Levi, *Sul principio di Dirichlet* (Rend. del Circ. Matem. di Palermo Tomo 22).

L'insufficienza del ben noto *principio di minimo di Dirichlet*, per dimostrare i teoremi di esistenza per i cosidetti problemi al contorno fu notata da Weierstrass. Per lungo tempo fu perciò abbandonato l'uso di un tale principio come metodo di dimostrazione, nonostante il tentativo di Weber (Journ. de Crelle, Tomo 71) di esporlo sotto forma precisa, il quale purtroppo non è immune da gravi obiezioni.

Hilbert in una memoria, ristampata nel Tomo 59 dei Math. Ann., ristudiò il detto principio, e riuscì a dargli forma rigorosa, per quanto riguarda le applicazioni ai teoremi di esistenza degli integrali abeliani su una data superficie F di Riemann. Resta però ammessa l'esistenza di funzioni continue U sulle superficie di Riemann, che ai tagli presentano certe discontinuità di prima specie, e il cui parametro differenziale primo $\Delta_1 u = \left(\frac{d u}{d x}\right)^2 + \left(\frac{d u}{d y}\right)^2$ (dove x, y indicano coordinate cartesiane ortogonali) è integrabile su tutta la superficie F in guisa che l'integrale di $\Delta_1 u$ esteso a tutto F sia finito (*). Il metodo di Hilbert consiste nell'uso di una successione $u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots$ di tali funzioni, tali che $\lim_{n=\infty} \iint \Delta_1 u_n \, dx \, dy = d$, quando con d si indichi il limite inferiore dei valori, di cui è suscettibile l'integrale

$$\iint_F \Delta_1 u \, dx \, dy,$$

quando la funzione u soddisfa alle condizioni sopra citate. Hilbert riesce a far vedere che la successione $v_1, v_2 \ldots\ldots$, dove

$$v_n = \int_0^x \int_0^y u_n \, dx \, dy$$

tende per $n = \infty$ uniformente a una funzione limite v, armonica in F, tale che la funzione $u = \frac{d^2 v}{dx\,dy}$ è una funzione armonica in F, che ai tagli presenta le discontinuitá prefisse a priori (ed è quindi la parte reale di un integrale abeliano relativo a F).

Il metodo di Hilbert non sembra, senza modificazioni, applicabile al caso più generale del problema di Dirichlet; e la sua efficacia è limitata alle equazioni differenziali a coefficienti costanti.

(*) Hilbert si occupa soltanto di funzioni u, che siano *stückweise analytisch*

Digitized by Google

È merito del Levi l'aver la prima volta superato in qualche caso queste gravi difficoltà, e l'aver dato un metodo, che egli già dimostrò (Rend. del Circ. Mat. tomo 22) applicabile anche alle equazioni

$$A(x, y)\frac{d^2 u}{d x^2} + B(x, y)\frac{d^2 u}{d y^2} + \frac{d A}{d x}\frac{d u}{d x} + \frac{d B}{d y}\frac{d u}{d y} = 0,$$

dove A, B sono funzioni positive nel campo che si studia.

La Memoria del Levi è una memoria fondamentale in questo ordine di studii, non solo per la questione che risolve, ma per le tante idee, che incidentalmente essa contiene, e che saranno feconde in svariati studii di problemi al contorno. All'area Γ che si considera viene lasciata una sufficiente generalità: si ammette soltanto che entro Γ esista un cerchio R tale che le rette uscenti da un punto di questo cerchio incontrano Γ in due soli punti. Non si fa poi alcuna altra ipotesi circa l'esistenza di tangenti e la rettificabilità del contorno c di Γ, ecc. Tutto quanto è necessario per la validità del metodo, si deduce dall'ipotesi fatta su c con ogni rigore.

E con tutta probabilità il metodo si potrà estendere anche a contorni ancora più generali.

Come è ben noto, la questione da risolvere è la seguente: *Data una catena di valori su* c, *si consideri l'insieme delle funzioni* u *delle due coordinate cartesiane ortogonali* x, y, *le quali esistono in* Γ *e assumono su* c *i valori prefissi. E si considerino i corrispondenti valori di* $I(u) = \int\int \Delta_1 u \, dx \, dy$. *Se* d *è il limite inferiore di questi valori*, in Γ *esiste una funzione* U (x, y), *che su* c *assume i valori prescritti, e per cui è proprio* I (U) = d. *Dedurre poi che questa funzione* U (x, y) *è armonica in* Γ.

Anzitutto a quali condizioni dovranno soddisfare le funzioni u, che si considerano? Evidentemente esse dovranno essere continue in Γ, assumere su c i valori prescritti, avere generalmente derivate prime, ed essere tali che il loro parametro differenziale primo sia integrabile in Γ in guisa che $I(u)$ sia finito.

Un primo risultato notevolissimo del Levi è che, se noi imponiamo alle funzioni di u soltanto queste condizioni, il metodo di minimo è fallace, perchè è sempre $d = 0$, e non se ne può quindi dedurre alcuna dimostrazione dell'esistenza della funzione U cercata.

Il Levi dimostra la validità del metodo di minimo, appena si imponga l'ulteriore condizione che su ogni retta $x = cost.$ ($y = cost.$) la funzione $u(x, y)$ sia una funzione *assolutamente continua* della y (della x), quando si escluda al più un aggregato di misura nulla di tali rette (*).

(*) Questa forma più espressiva di tradurre le condizioni del Levi, si basa su un teorema del Prof. Vitali. (Cfr. Atti della R. Accad. di Torino 1905).

Digitized by Google

Come si vede, il campo funzionale delle funzioni $u\ (x, y)$, per cui si deve cercare il limite inferiore di $I\ (u)$, ha ancora una grande estensione: ed è ben notevole che ciononostante la funzione U sia una funzione armonica, e quindi analitica delle x, y.

E anzitutto sorge la questione, se esistano in Γ funzioni $u\ (y, x)$ che soddisfano a tutte le condizioni imposte.

A questa questione si risponde, usando del concetto di ***funzioni mediatrici***, che il Levi ha introdotto per primo, e la cui importanza è fondamentale.

Se $v\ (x, y)$ è una funzione definita in Γ. se θ è una costate $(0 < \theta < 1)$ e se ξ, η è un punto qualunque del cerchio R o della sua periferia si indichi con $V\ (x\ y \mid \xi\ \eta\ \theta)$ la funzione che entro $c\ (\xi\ \eta\ \theta)$ (*) è uguale a $V\ [x + \theta\ (x - \xi);\ y + \theta\ (y - \eta)]$ e che tra c e $c\ (\xi\ \eta\ \theta)$ assume il valore che la $V\ (x, y)$ ha nel punto in cui il raggio proiettante il punto $(x\ y)$ dal punto $(\xi\ \eta)$ incontra c. Si pone poi

$$u\ (x, y, \theta) = \frac{1}{a} \int\int_R V\ (x\ y\ ,\ \xi\ \eta\ \theta)\ d\ \xi\ d\ \eta$$

dove a è l'area del cerchio R. La u si dice la ***funzione mediatrice della o*** rispetto alla costante θ.

Si dimostra che se la v è una funzione qualunque, ma limitata, allora la $u\ (x, y, \theta)$ è continua e coincide su c con la v. Se dunque i valori dati su c sono limitati, si prenda la funzione w, che su c assume i valori voluti, e che entro Γ è p. es. zero. Ogni sua funzione mediatrice w_1 è continua in Γ e assume su c i valori voluti.

Se la V è anche continua, la U possiede entro c derivate prime.

Cosicchè una funzione mediatrice di una funzione mediatrice di w è una funzione, che su c assume i valori voluti, è continua in Γ, e possiede nei punti interni a Γ derivate prime limitate (purchè la catena dei valori dati su c possegga derivate prime limitate rispetto all'arco s di c). (**)

Esistono dunque in Γ delle funzioni, soddisfacenti alle condizioni volute.

Consideriamo ora una successione di funzioni $u_1, u_2 \ldots\ldots$ tali che il $\lim_{n=\infty} I\ (u_n) = d$. Le funzioni u_n potranno non tendere a una funzione limite U. Cosicchè dallo studio della detta successione non si può senz'altro concludere l'esistenza di U. Questa grave difficoltà si sormonta pure per mezzo delle funzioni mediatrici. Si dimostra cioè che, se noi prendiamo una funzione v_n, mediatrice di u_n rispetto

(*) Con $(c\ \xi\ \eta\ \theta)$ si indica la linea omotetica di c rispetto al punto (ξ, η) e col rapporto di omotetia $\frac{1}{1 + \theta}$

(**) La rettificabilità di c è conseguenza della ipotesi fatta su c.

Digitized by Google

a un conveniente numero θ_n (che soddisfa, tra l'altro, alla $\lim_{n=\infty} \theta = 0$), si ha pure

$$\lim_{n=\infty} I\ (v_n) = d.$$

E la successione delle v_n tende precisamente in modo uniforme a una funzione continua U (che quindi su c assume i valori prescritti). Si dimostra poi che è proprio $I(U) = d$. Da questa sola proprietà si riesce a dedurre la formola di Green per la funzione U, dalla quale segue senz'altro che U possiede anche derivate seconde nei punti interni a Γ, e che essa è una funzione armonica.

Le condizioni imposte ai valori dati su c (di formare cioè una catena limitata e a derivata prima limitata) si possono poi, per mezzo dei teoremi di Harnack, ridurre all'unica che la catena di valori data su c sia una funzione continua e limitata di s.

GUIDO FUBINI.

H. WEBER - J. WELLSTEIN. — ***Encyklopädie der Elementar-Mathematik.*** Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. Zweiter Band; ***Encyklopädie der elementaren Geometrie***, bearbeitet von H. WEBER, J. WELLSTEIN und W. JACOBSTHAL. Leipzig. B. G. Teubner, 1905. Gr. 8°; p. VII + 604 (Prezzo del vol. legato Mk. 12).

Questo secondo volume della *Encyklopädie der Elementar-Mathematik*, di cui esaminammo a suo tempo, in questo *Bollettino* (T. VII, 1904, p. 116-21), il primo volume dedicato all'Algebra e all'Analisi e dovuto ad H. WEBER, comprende tre libri, che trattano rispettivamente dei « *Fondamenti della Geometria* », della « *Trigonometria* » e della « *Geometria analitica e stereometria* ». Il primo libro appartiene al WELLSTEIN, mentre il secondo e il terzo sono redatti dal WEBER, all'infuori della Geometria e Trigonometria specifica, la cui trattazione è dovuta a W. JACOBSTHAL.

Il piano e lo svolgimento dei « *Grundlagen der Geometrie* » del Wellstein sono coordinati sovratutto a illustrare il carattere astratto della Geometria, concepita come teoria logica di simboli non determinati, fra cui intercedano assegnate relazioni. L'A., contrapposti i concetti geometrici fondamentali alle corrispondenti nozioni intuitive, e dimostrata la insufficienza logica delle definizioni tradizionali, enumera e studia alcune fra le infinite possibili interpretazioni della Geometria astratta, che egli caratterizza in base al sistema di postulati dello HILBERT. Così interpreta successivamente la Geometria sul complesso di sfere lineare parabolico, sul complesso di sfere lineare generale (iperbolico ed ellittico), sulla varietà analitica delle terne

Digitized by Google

ordinate di numeri, su di un qualsiasi sistema lineare ∞^3 di enti geometrici o analitici; e, mostrando come nel complesso lineare di sfere generale i principi della Geometria siano verificati tutti all'infuori della ipotesi relativa al parallelismo, fa nascere le due Geometrie non euclidee, per le quali nota che da codesto punto di vista esse, in ordine alla validità logica, si presentano come solidali con la Geometria euclidea; mentre d'altra parte mostra, mediante constatazioni numeriche, che tutte e tre le Geometrie si possono considerare, entro certi limiti, empiricamente equivalenti.

In codesto modo le Geometrie non euclidee risultano, nella loro origine, subordinate alla concezione euclidea; per dimostrare la possibilità di fondarle direttamente, l'A. stabilisce per via sintetica i principi della Geometria proiettiva e determina secondo il Cayley le metriche non euclidee.

L'ultima parte del libro ha carattere più elementare. In essa l'A. dà anzitutto un cenno sul modo di stabilire, in base ai postulati dello HILBERT, alcuni dei più importanti teoremi della planimetria euclidea (uguaglianza di triangoli, somma degli angoli di un triangolo, intersezione di rette e circonferenze e di circonferenze fra loro); studia la similitudine, in quanto conduce al calcolo geometrico dei segmenti; e pone le basi della teoria della equivalenza piana, mettendo in luce sulle tracce dello HILBERT, la diversa portata, in Geometria non archimedea, della equivalenza per somma e per differenza. Seguono la rettificazione della circonferenza e la quadratura del cerchio; dopo di che l'A. svolte rapidamente le proprietà della inversione (che fu già ripetutamente applicata nel corso del libro) risolve il problema di Apollonio, del quale esamina l'elegante interpretazione non euclidea, e mostra brevemente, seguendo lo ZEUTHEN, come in base alla teoria dei sistemi lineari di cerchi si possano studiare elementarmente le proprietà metriche delle sezioni coniche.

Considerata in sè stessa, questa monografia del WELLSTEIN è indubbiamente assai pregevole: e sarebbe ingiusto il passar sotto silenzio le molte osservazioni suggestive e le acute considerazioni, che l'A. vi ha profuso; ricordo per esempio i due paragrafi sulla *essenza dei concetti fondamentali* e sulla *intuizione* (pagg. 97-147), in cui l'A. assai brillantemente espone le sue vedute intorno al problema filosofico dei fondamenti della Geometria, discutendo in particolare la tesi Kantiana della apriorità della Geometria euclidea. Nondimeno a me pare che questi « *Grundlagen der Geometrie* » del Wellstein non rispondano se non in parte agli intendimenti, da cui trasse origine questa Enciclopedia; la quale, indirizzata ai professori di Matematica delle scuole medie, mira a metter loro sott'occhio tutto quanto che di risultati generali e di conclusioni critiche può essere volto a vantaggio dell'insegnamento della matematica elementare. L'A. a quella via storica, che più agevolmente conduce ad una sintesi limpida di

Digitized by Google

una qualsivoglia corrente di idee, ha preferito nella sua trattazione un procedimento deduttivo, il cui disegno generale si va manifestando al lettore soltanto a posteriori. E le difficoltà, che per questa ragione incontrerà nella lettura della monografia la più gran parte del pubblico, cui essa si rivolge, saranno certamente accresciute dalla assenza assoluta di ogni richiamo determinato ad altri scritti, di ogni notizia precisa su quelle opere stesse, che in quest'ordine di idee rappresentano le pietre migliari del cammino conosciuto; l'A. anzi presuppone senz'altro la conoscenza, per qualche punto dettagliata, dei *Grundlagen* dello HILBERT e considera come universalmente familiari le *Vorlesungen* del PASCH.

Ma un altro appunto di indole più generale parmi si possa opporre al piano dei *Grundlagen* del Wellstein: egli ha trattato il problema dei fondamenti quasi esclusivamente come un problema di teoria della conoscenza, mentre l'indole del libro richiedeva che qui se ne considerasse insieme, se non prevalentemente, l'aspetto didattico.

Il secondo libro (pag. 303-438) è un vero e proprio trattato teorico di Trigonometria piana e sferica; e credo che sarà accolta con interesse la esposizione che in forma singolarmente perspicua dá il JACOBSTHAL della Trigonometria sferica, ispirandosi alla bella memoria dello STUDY « Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen » (Leipzig 1893).

Nel terzo libro infine (pag. 439-593) il WEBER dopo una esposizione elementarissima dei principi della Geometria analitica cartesiana del piano, pone le basi della Stereometria e stabilisce elementarmente il volume della piramide e il principio di Cavalieri, di cui dà alcune applicazioni a tipi semplici di solidi. Il Libro si chiude con un cenno sui gruppi di rotazioni intorno ad un punto e sui poliedri regolari e con una rapida trattazione delle primissime formole della Geometria analitica cartesiana dello spazio.

È pressochè inutile il notare come qui il WEBER dimostri una volta ancora la sua insuperata abilità di espositore elegante e suggestivo; ma questi pregi singolarissimi non bastano a compensare le lacune e i difetti di coordinamento che qui, in ordine agli scopi del libro, mi sembrano manifesti.

I principi della Geometria solida sono qui esposti in forma discorde dalla intonazione dell'ultimo capitolo del primo Libro, nel quale essi dovevano trovare il loro posto più conveniente e naturale. Nè io comprendo perchè siasi voluto inserir qui una esposizione della Geometria analitica assolutamente elementare e neppur lumeggiata da notizie e considerazioni storiche, quando il WELLSTEIN gia nel primo Libro pre-

Digitized by Google

suppone cognizioni ben superiori (cfr. p. es. il § 13). In fine del teorema di M. Dehn sulla equivalenza dei solidi, che pur rappresenta uno dei più bei risultati conseguiti nella critica della Geometria elementare, non è dato che un cenno del tutto generico.

Se poi qui da ultimo raccogliamo in uno sguardo complessivo il contenuto di questo intero volumedovremo constatare un'altra lacuna di non lieve importanza. È bensì vero che nel primo volume il WEBER ha dimostrato la irresolubilità con riga e compasso dei problemi di terzo grado e la trascendenza del problema della quadratura del cerchio. Ma in questa Enciclopedia della geometria elementare altre questioni meno elevate, ma non meno interessanti per l'insegnamento medio dovevano essere svolte sull'uso dei varii strumenti del disegno e sulla loro portata, sui metodi di trasformazione e di risoluzione dei problemi elementari.

Conchiudendo, i singoli capitoli di questo volume, esaminati ciascuno separatamente meritano la più alta considerazione; ma le lacune dianzi avvertite e i difetti di coordinamento e di proporzione fra le diverse parti scemerannо alquanto l'efficacia di quest'opera in ordine agli scopi, per i quali essa fu concepita.

UGO AMALDI.

A. BERRY. *Compendio di storia della astronomia, tradotto dall'inglese dal Dottor* DIONISIO GAMBIOLI, *con due appendici sulle specole e sugli astronomi italiani dei tempi recenti. Riveduta e corretta dall'astronomo* ELIA MILLOSEVICH. Roma-Milano, Soc. ed. Dante Alighieri, 1907, 8°, p. XXVI-612. [Prezzo L. 8].

Ringrazio il prof. Gambioli per avermi, con la presente versione, fatta conoscere un'opera oltre ogni dire pregevole, in cui la forma elegantemente spigliata maschera la profondità degli studi scientifici e storici dei quali essa è frutto, e col presente annunzio manifesto tale sentimento di gratitudine, adoperandomi a diffondere la conoscenza di quell'opera.

Il sig. Berry, noto fra noi come cultore dell'odierna teoria delle superficie algebriche, appare una nuova recluta del piccolo esercito costituito dai cultori degli studi di teoria scientifica; diamogli il benvenuto e constatiamo come chi esordisce con una storia dell'astronomia capace di far concorrenza a quella di R. Wolf, sembra destinato a ricevere il pennacchio di colonnello e forse il bastone di maresciallo.

Nei lettori egli non suppone che una cultura generica; nel mentre narra la vita degli scienziati, ne espone con tanta lucidità i ritrovati che giunge a porgere un concetto esatto di ciò che fu e di ciò che è l'astronomia *di osservazione*. Poniamo questa restrizione, perchè

Digitized by Google

egli, certamente nell'intento di non spaventare la generalità dei lettori, si è proibito di dar notizia di quelle immense a fruttifere investigazioni puramente analitiche, grazie alle quali l'astronomia è capace di predire con la massima esattezza gli avvenimenti che accadranno in cielo ed è, per generale consenso, riguardata come la più esatta delle scienze naturali, che tutte le altre (finora con mediocre successo!), si sforzano di emulare.

Dopo un cenno sull'astronomia dei popoli fanciulli, il nostro A. s'indugia sulla scienza dei Greci; segue una rapida rassegna dell'astronomia medioevale, in Oriente ed in Occidente, e quindi un capitolo dedicato a Copernico; troviamo poi la narrazione delle vicende del sistema copernicano, quindi due capitoli dedicati uno a Gallileo, l'altro a Keplero; la scoperta della gravitazione fatta da Newton viene esposta particolareggiatamente dal nostro A., secondo cui, gli astronomi posteriori si ripartirono in due schiere: una formata da coloro che svolsero le conseguenze di quella geniale concezione, mentre l'altra lo è da coloro che accrebbero di nuove osservazioni la ed uno raccolta fatta nei secoli precedenti. Un capitolo dedicato ad Herschel relativo al secolo XIX chiudono l'interessante opere del Berry.

Benchè questi abbia tenuto tutto il meritato conto dei contributi dati dagli Italiani alla scienza degli astri, pure il traduttore, sempre animato da beninteso amor di patria, aggiunse del suo due Appendici aventi lo scopo di far noti gli uomini e gli istituti a cui si è di essi debitori.

La traduzione è generalmente lodevole, a parte di qualche punto in cui non consegue la desiderata chiarezza; in generale fedele, in qualche momento lo è troppo: parlo dei passi (p. 501-504) ove è fatta menzione di alcuni ritratti di astronomi; non essendo questi stati inseriti nella traduzione era, a parer nostro, ragionevole, sopprimere anche qualunque menzione di essi, od almeno ricordarli altrimenti.

Un'ultima osservazione: perchè mai l'A. ed il suo traduttore, che tante fatiche spesero pur di far opera veramente utile, non diedero al loro lavoro il degno coronamento di un indice dei nomi citati?

G. L.

F. R. Helmert. *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate:* 2e Auflage; 8°. pag. XVIII + 578, Leipzig u. Berlin, G. B. Teubner 1907).

1. — Il nome dell'Autore, l'eminente scienziato che presiede all'Istituto Geodetico Prussiano, e all'Ufficio Centrale dell'Associazione geodetica internazionale, non ha bisogno di essere presentato ai lettori. Nè riuscirà nuovo, almeno ai Geodeti e agli Astronomi, il titolo dell'opera che già, in prima edizione, fu pubblicata nel 1872 (Teubner,

Digitized by Google

Lipsia 1872, pag. XI-348). Per coloro che hanno famigliarità con quella prima edizione, basterà dire che questa seconda, pur essendo nelle idee generali, nella ripartizione della materia, nello spirito eminentemente applicativo, del tutto simile alla prima, ne differisce tuttavia non solo per la accurata revisione di ogni singola parte, ma ancora per il notevole incremento subito da talune trattazioni e per le non poche aggiunte rese necessarie dai progressi fatti da questi studi negli ultimi decenni.

Per tacere di cangiamenti di minore importanza, accenneremo al maggiore sviluppo dato nel Cap. II alle ricerche intorno alla valutazione, a posteriori, del grado di precisione, nel Cap. III alla proprietà e al trattamento delle equazioni normali; nello stesso Cap. notiamo la introduzione del concetto delle *freie Funktionen* (funzioni *mutuamente indipendenti*) di Thiele, e delle *reduzierte Fehlergleichungen* di Schreiber; nel Cap. IV vediamo aggiunte le formole di Gauss e di Thiele dalle quali risulta come la compensazione, secondo il metodo dei m. q., renda massimo il peso di ogni funzione della quantità osservata. Notevolmente ampliato è il Cap. V relativo alle indagini, a posteriori, sugli errori d'osservazione, e sui *pesi*; molto esteso, e in grandissima parte rifatto, il Cap. VI sulla rappresentazione approssimata delle funzioni e sulla ricerca delle formole interpolatorie.

Alla sezione VII della prima edizione riguardante le applicazioni corrispondono qui, con una estenzione più che doppia, i Cap. VII e VIII.

Nè soltanto in questi Capitoli, ma per tutto il libro, ad immediata illustrazione della teoria, sono stati aggiunti nuovi esempii numerici relativi a lavori astronomici e geodetici, o d'altro genere, di recente esecuzione. Nuovo del tutto è il Cap. IX che tratta della più conveniente ripartizione del lavoro di osservazione (Oekonomie der Beobachtungen).

Per chi non abbia sufficiente pratica della prima edizione del libro, e in parttcolare per i giovani studiosi, mi sembra opportuno dare qui per disteso la serie degli argomenti trattati nella novella pubblicazione.

2. — Osserviamo innanzi tutto che, sebbene l'Autore modestamente dichiari che il suo libro ha scopi essenzialmente pratici e che, perciò, egli ha voluto fondare i metodi sopra basi, per quant' è possibile, semplici, pur tuttavia vi ha, per ogni argomento, uno sviluppo complementare di teorie che permette allo studioso di farsi un' idea più larga dei fondamenti logici delle regole date. Nè mancano le citazioni di quelle fonti che possono servire ad aumentare una tale cultura.

Nel I Cap. si tratta delle *nozioni fondamentali sugli errori d' osservazione* e si enunciano i *principali problemi di combinazione delle*

Digitized by Google

osservazioni (1). Posti in evidenza i caratteri distintivi fra gli errori grossolani, gli errori regolari e gli accidentali, e introdotto il concetto di *legge di frequenza degli errori* si dimostra come, in particolare, alla usuale *legge esponenziale* o *di Gauss* si possa giungere col noto principio di Hagen, di considerare cioè l'errore accidentale come formato di un gran numero di piccoli contributi, tutti fra loro eguali in valore assoluto ma di segno arbitrario. Segue la ricerca del grado di precisione d'una classe d'osservazioni per mezzo del valor medio S_m delle potenze m^{me} degli errori, e in particolare del valor medio assoluto degli errori e del valor medio dei quadrati degli errori. Il grado di sicurezza con cui queste valutazioni possono essere fatte è poi opportunamente discusso.

Un notevole sviluppo è dato poi ad un altro modo di dedurre il grado di precisione da una classe di osservazioni attuali, quello cioè di distribuire gli errori per ordine di grandezza crescente e numerare quanti ve ne siano al di sotto di un certo limite di grandezza (il noto principio dell'*error probabile* si può considerare come discendente da ricerche di questo genere).

Segue la rassegna delle principali forme sotto cui può presentarsi il problema della combinazione. Il Cap. termina colla deduzione della formola, che può dirsi fondamentale per questo studio:

$$(1) \qquad M^2 = a_1^2 \mu_1^2 + a_2^2 \mu_2 - a_n^2 \mu_n^2 \qquad \left(a_r = \frac{d\,F}{d\,l_r}\right)$$

che dà l'error medio di una funzione $F(l_1\ l_2 .. \ l_n)$ di quantità osservate indipendenti ove i μ_i sono gli errori medii delle l_i. La formola è non solo fondamentale per la teoria della combinazione, ma anche per le applicazioni pratiche immediate. Fra le quali alcune molto importanti (error medio in una misura di base, id. nella misura di un angolo; id. nel lato di un triangolo) sono qui date immediatamente.

3. — Il II Capitolo tratta della determinazione ripetuta di una grandezza. Nel caso di osservazioni di eguali precisione, viene ammesso il principio della media aritmetica, e dimostrato come questo corrisponda a render minima la somma dei quadrati dei residui. Nel caso di osservazione di differente precisione, è introdotta la nozione del *peso*, considerando un'osservazione di peso p come equivalente alla media di p osservazioni di peso *uno*; dal che si deduce ovviamente che i pesi di due osservazioni stanno fra loro in ragione inversa dei quadrati dei rispettivi errori medii. La detta definizione del peso conduce poi subito alla nota formola della *media pesata*. E'

(1) Ci permettiamo di conservare questa espressione Gaussiana, in corrispondenza alla *Ausgleichung* usata in ogni caso da Helmert; perchè da noi la parola *compensazione* è più propriamente adoperata per quella forma di combinazione che ha luogo quando siano date a priori *delle equazioni di condizione* cui le incognite debbono rigorosamente soddisfare.

Digitized by Google

poi, nel modo consueto, trattata la determinazione a posteriori dell'*errore medio dell'unità di peso* in base a un dato sistema di osservazioni attuali, di eguali o di diversi pesi.

Chiudono il Capitolo le note considerazioni teoriche (Gauss, ***Theoria motus etc.***) per le quali, quando si voglia sostituire al principio del valor più conveniente quello del valor più probabile, il postulato della media aritmetica considerato come valor più probabile conduce alla legge esponenziale. E dal punto di vista storico (ma proprio soltanto da questo punto di vista) valeva la pena di richiamare questa dimostrazione.

4. — Il problema che, almeno nella sostanza, può dirsi il più generale della combinazione delle osservazioni. forma argomento del Cap. III, voglio dire la determinazione diretta di più incognite $x, y, z...$ legate a quantità *osservate* da più equazioni del tipo

$$a_i x + b_i y + c_i z + ... + l_i = \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{2}$$

dove il numero (ω) delle incognite si suppone minore del numero (n) delle equazinni, e dove ε_i rappresenta il contributo (naturalmente incognito) che alla valutazione del polinomio che sta al 1° membro, è dato dagli errori d'osservazioni. Alle (2) darò, come sono solito fare, il nome di ***relazioni osservate***, non sembrandomi opportuno tradurre letteralmente, come taluno fa, l'espressione ***Fehlergleichung*** degli scrittori tedeschi (1).

Helmert si limita a supporre che i coefficienti $a_i\ b_i\ c_i...$ siano quantità teoricamente note e che le sole l_i siano date dall'osservazione, nel qual caso ε_i è, naturalmente, l'errore commesso nella l_i. Il supporre più generalmente, che anche le $a_i\ b_i\ c_i...$ possano essere affette da errori è, in taluni casi, necessario, nè d'altra parte complica di molto le deduzioni; a questa ipotesi più generale si attenne Gauss nella ***Theoria combinationis*** etc. Ma probabilmente l'amore della semplicità e l'interesse delle applicazioni geodetiche, dove i coeff. $a_i\ b_i\ c_i...$ sono, o noti a priori, o assegnati con errore trascurabile, ha indotto l'A. a quella ipotesi restrittiva.

Le così dette equazioni normali che dànno i valori più convenienti delle x, y, z sono dedotte dalle (2) in base al principio dei minimi quadrati; l'A. dimostra poi come ciascuna delle equazioni normali possa considerarsi come diretta conseguenza del principio della media aritmetica, quando si supponga, volta per volta, già fissati i valori di tutte le incognite *meno una*. Osservazione semplice, ma non usuale e molto istruttiva.

---

(1) I trattatisti Francesi le chiamano *equation des condition*, ma ci sembra conveniente che questa denominazione sia riserbata a quelle relazioni che debbono essere *rigorosamente* verificate (ossia nei secondi membri nulli).

Digitized by Google

Lo stesso problema delle determinazioni indirette viene poi trattrato in base al principio di render minimo l'error medio di ogni incognita (Gauss, *Theoria combinationis, etc.*) e ammettendo, tacitamente il postulato che si debbano dedurre i valori della incognita coll'annullare n combinazioni lineari omogenee dei primi membri delle (1).

Seguono: un'interessante rassegna storica, quindi gli algoritmi per la risoluzione numerica e pel controllo dei calcoli, la deduzione dell'error medio a posteriori, e le formole relative al caso di determinazioni indirette in base a osservazioni di differente precisione.

Nel § 8 di questo capitolo si considera poi il caso in cui le *relazioni osservate* non siano lineari; ed è qui tolta quella limitazione di cui sopra si è detto. Nel § 9 è valutato l'error medio di una funzione delle qualità x, y, z dedotte dalle equazioni normali, ed è dimostrato che tali valori delle incognite rendono minimo l'error medio di una funzione lineare qualsiasi di esse.

Dopo lo studio di un caso particolare, il quale ha specialmente, interesse per le osservazioni *angolari*, il capitolo si chiude colla teoria delle osservazioni *totalmente equivalenti*. Si intende per osservazioni totalmente equivalenti al sistema (2) un sistema di relazioni fittizie, in numero uguale al numero delle incognite x, y... e tali che conducano alla stesse equazioni normali cui la (2) danno luogo; tali osservazioni fittizie possono quindi, vuoi pel calcolo dei valori più convenienti, vuoi per quello degli errori medii delle incognite e di funzioni qualunque di esse, sostituire completamente il sistema delle (2). Infiniti sistemi di osservazioni equivalenti a un sistema dato possono immaginarsi. Le così dette *equazioni normali ridotte* di Gauss (delle quali la r^{ma} non è altro che la r^{ma} equazione normale di cui si siamo eliminate le prime *r-1* incognite per mezzo delle precedenti *r-1* equazioni normali) costituiscono un caso particolare di completa equivalenza, e possono essere vantaggiosamente impiegate per la risoluzione di varii problemi.

Si collega col concetto delle osservazioni equivalenti ed ha analoghe applicazioni, quello delle funzioni *mutuamente indipendenti* d Thiele (*freie Funktionen*). Tali si dicono due funzioni lineari

$$F_1 = \Sigma a_i l_i \quad , \quad F_1 = \Sigma b_i l_i$$

delle quantità osservate $l_1, l_2, \ldots l_n$, quando $\Sigma a_i b_i = 0$. In tal caso, se μ_1 μ_2 sono gli errori medii delle F_1 F_2 l'error medio M di una combinazione lineare

$$\varphi = p\ F_1 + q\ F_2$$

va calcolato colla formola semplice $M^2 = p^2\mu_1^2 + q^2\mu_2^2$, proprio come se le F_1 F_2 fossero quantità direttamente osservate. L'introduzione di funzioni di tal sorta agevola la trattazione di diversi problemi, in quanto che permette di applicare, sotto certe condizioni, la formola

Digitized by Google

fondamentale (1) anche nel caso in cui le l non siano quantità direttamente osservate.

Il Cap. IV (*Korrelatenausgleichung*) tratta quelle che noi chiamiamo propriamente ***compensazione***, ossia la ricerca dei valori più convenienti di quantità ***direttamente*** o ***non direttamente*** osservate, nel caso in cui le quantità stesse debbano soddisfare rigorosamente a certe ***equazioni di condizione***, teoricamente prestabilite.

Come è noto, l'uno o l'altro di questi problemi potrebbe facilmente ridursi al problema trattato nel precedente capitolo. Ma giova, il più delle volte, valersi di nuove soluzioni simmetriche colla introduzione di quelle qualità ausiliarie, cui si da il nome di *correlativi* (Gauss). I metodi qui svolti sono quelli abbastanza noti di Gauss, Hansen e Bessel.

Nel caso delle determinazioni ***indirette***, la introduzione delle osservazioni equivalenti, di cui al capitolo precedente, conduce molto comodamente ad una delle soluzioni del problema.

Vi hanno poi dei casi in cui le condizioni geometriche esatte, cui debbono soddisfare le quantità che si vogliono determinare, non possano comodamente stabilirsi senza introdurre in calcolo altre incognite ausiliarie, le quali naturalmente si suppongono in numero minore di quello delle equazioni. Eliminando queste incognite ausiliarie, si ricondurrebbe il problema al caso della consueta compensazione, ma può darsi che convenga invece una soluzione diretta, senza tale eliminazione; a questo argomento è dedicato il § 5 del Capitolo di cui discorriamo.

Il § 6 tratta poi delle osservazioni ***parzialmente*** equivalenti. Abbiansi n osservazioni effettive, e siano $F_1\ F_2\ ;\cdots F_r$ r funzioni ($r \leq n$) di queste. Si consideri poi una funzione lineare

$$\psi = \rho_1 F_1 + \rho_2 F_2 + \ldots + \rho_n F_n$$

dove i ρ sono coefficienti arbitrarii. Se r osservazioni fittizie son tali da attribuire alla ψ lo stesso valore e lo stesso peso che per essa si deducono dalle n osservazioni date, si dice che le fittizie sono ***parzialmente*** equivalenti alle n effettive, e che l'equivalenza sussiste rispetto alle $F_1\ F_2 \ldots .\ F_r$. Per $r=n$, si ha la equivalenza ***completa***, di cui al Cap. precedente.

Merita particolare attenzione il caso $r = 2$. Le due funzioni F_1, F_2 possono allora considerarsi come due coordinate atte a determinare la posizione di un punto P nel piano. Sia P_0 quel punto che corrisponde ai valori più convenienti delle $F_1\ F_2$ Una coppia di osservazioni equivalenti, rispetto alle $F_1\ F_2$, a un dato sistema $l_1\ l_2 \cdots l_n$, assegna la posizione di due rette (r_1, r_2) intersicantisi in P_0; gli errori medii della $F_1\ F_2$ rappresentano gli ***scorrimenti medii*** $\mu_1\ \mu_2$ delle due rette r_1, r_2. Se A, B sono le intersezioni della retta r_1 colle parallele alla r_2 distanti da queste di μ_2, i punti A, B stanno sopra un'elisse E che ha centro in P_0 rispetto alla quale la retta $r_1\ r_2$ sono diametri conjugati.

Digitized by Google

E' questa la cosidetta *elisse degli errori*, di cui la teoria fu per la prima volta data da Bravais e sviluppata poi da Andrae, da Helmert e da Schols. Nel caso della legge di frequenza di Gauss, ogni ellisse di centro P_0 e simile alla E è luogo di posizioni egualmente probabili del punto P. Questa teoria, e i relativi esempii sviluppati nei loro dettagli, chiudono il Cap. IV.

I metodi studiati di combinazione delle osservazioni hanno valore in quanto sussistono i postulati fondamentali sulla accidentalità degli errori d'osservazione e sul grado di precisione (peso) delle osservazioni. Alle ricerche, a posteriori, sulla validitá di questo postulato è dedicato il Cap. V. L'A. comincia col dimostrare come sia spesso difficile il porre in evidenza gli errori *regolari*, presentando varii casi semplici in cui sussiste una causa sistematica di errore senza che, per questo, i residui risultanti dalla applicazione del metodo dei m. q. perdano i principali caratteri degli errori accidentali. Tratta quindi, con molta diffusione, dei varii criterii cui si può assoggettare un sistema di residui per vedere se si possano considerare veramente come errori accidentali. E finalmente prende in esame il caso in cui un sistema di errori attuali risulti dalla mescolanza di errori di differenti classi di osservazione.

Una seconda parte di questo cap. V si riferisce alla ricerca e alla correzione dei *pesi*. Quando un sistema di osservazione si suddivide, tenuto conto di una circostanza materiale qualsiasi, in più gruppi, può darsi che l'esame dei residui conduca a sospettare che le operazioni di un gruppo, siano, in media, più precise di quelle di un altro. E' allora opportuno rifare i calcoli attribuendo ai gruppi pesi differenti se prima si erano attribuiti pesi eguali, o, più generalmente, correggendo i pesi ammessi a priori. Esempii di calcoli di tal genere sono dati dall'A., e, come connesse con quelle ora dette, sono poi trattate le questioni della *esclusione* di singole operazioni e dell'*error massimo ammissibile*.

Il Cap. si chiude con un cenno dei tentativi che si possono fare per mettere in evidenza cause sistematiche di errore, e coi relativi esempi.

Nello studio matematico dei risultati sperimentali, uno dei problemi più importanti, ma meno generalmente approfonditi dai trattalisti in causa della sua difficoltà e anche, bisogna dirlo, in causa della sua indeterminatezza, é quella della rappresentazione approssimata della funzione e della ricerca delle formole empiriche.

L'A. espone nel Cap. VI quanto di più interessante si poteva dire sull'argomento; tratta innanzi tutto della sostituzione di espressioni analitiche approssimate in luogo di espressioni esatte, poi della determinazione dei coefficienti di espressioni stabilite empiricamente. E' superfluo osservare che, in questi casi, la applicazione del metodo dei m. q. ha, generalmente, un valore *convenzionale*. Poichè i residui (valori *dati* meno valori *teorici*) dipendono in parte almeno dalla

Digitized by Google

inesattezza delle espressioni analitiche assunte; quindi non possono riguardarsi come errori accidentali; e ai risultati del calcolo, per quanto riguarda gli *errori medii* delle incognite, non può attribuirsi il significato che loro spetta nelle ordinarie e genuine applicazioni della teoria degli errori.

Una seconda e più estesa parte di questo Cap. è dedicato alla ricerca di formole interpolatorie, o per potenze intere della variabile, o per funzioni sferiche semplici (polinomi di Legendre) o, finalmente, per funzioni trigonometriche. Vien trattata da ultimo la interpolazione secondo il principio degli errori *quasi sistematici di* Thiele. Di questa, in grazia della sua relativa novità, dirò brevemente la sostanza. Se un sistema di errori attuali, di carattere del tutto accidentale, viene ordinato, o per ordine di grandezza crescente, o in qualsiasi altro modo meno semplice, esso perde, in parte, il carattere della accidentalità, in quanto che l'errore che occupa il posto m^{esimo} ha, a priori, un importanza differente di quello di posto n^{esimo} ($n = m$). Ora, avendosi una serie di valori $l_1, l_2, \dots l_n$ per una incognita fisica, ottenuti in differenti tempi $t_1, t_2, \dots t_n$, può darsi che il sistema degli errori commessi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$, pur conservando, nel suo insieme, i caratteri dell'accidentalità, si sia venuto in qualche modo, e per una causa a noi ignota, ordinando rispetto al tempo. Allora, se a priori i pesi dei valori dati sono $g_1, g_2 \dots g_n$, non è più ragionevole applicare al calcolo delle incognite x la solita formola

$$x = \Sigma\, l_i\, g_i : \Sigma\, g_i$$

nè dedurre da questa i valori dei residui. Ma conviene piuttosto ammettere che nei differenti tempi i valori più convenienti delle incognite siano fra loro differenti, poniamo $x_1\ x_2 \dots x_n$, e cercar di determinare le x per mezzo delle 2 n-1 relazioni osservate

$$l_i - x_i = \lambda^i$$
$$x_i + 1 - x_i = \delta_l$$

dove il valor medio del quadrato del residuo λ_i è quello che corrisponde al peso supposto g_i, è il valor medio del quadrato di δ_i si ammette proporzionalmente all'intervallo di tempo $t_i + 1 - t_i$. Questo, in sostanza, è il concetto della trattazione di Thiele, e da questi postulati si parte per la ricerca dei valori interpelati e dei relativi errori medii.

8. — Ognuna delle teoriche esposte nel libro è immediatamente illustrata, come già ho detto, con esempi numerici relativi, quasi sempre, a valori effettivamente osservati. Ma di più i due Cap. VII ed VIII sono del tutto dedicati alle *applicazioni*, e precisamente i primi allo studio sperimentale delle graduazioni dei cerchi, delle viti micrometriche e delle livelle a bolla d'aria; il secondo alla combinazione delle misure d'angoli orizzontali nei vertici geodetici e alla compensazione delle triangolazioni. Questi argomenti hanno occasionato l'ac-

Digitized by Google

cenno ad un gran numero di utili notizie tecniche e storiche intorno ai lavori delle stazioni e delle reti geodetiche.

9. — Finalmente il Cap. IX (Oekonomie der Beobachtungen) tratta, come da principio si è detto, della più conveniente ripartizione del lavoro d'osservazione. Il problema fondamentale è il seguente: «Si vuol ottenere il valore di una funzione incognita F la quale può esprimersi mediante ω quantità $l_1\ l_2\ \ldots\ l\omega$ fornite dall'osservazione; si suppongono osservate, oltre le precedenti, altre n-ω quantità $l\omega+1, \ldots, l_n$ legate a quelle da n-ω equazioni di condizione. Si domanda quali debbono essere i pesi $g_1\ g_2\ \cdots\ g^n$ delle dette osservazioni affinchè la F risulti determinata col massimo peso nelle ipotesi che si sia assegnato a priori il lavoro totale d'osservazione, ossia la somma $g_1 + g_2 + \ldots + g_n$». La soluzione generale del problema sta in ciò: che *n-ω fra i g debbono esser nulli*, ossia che il lavoro di osservazione deve essere concentrato sopra tante osservazioni quanto sono appunto necessarie per la determinazione di F (teorema di *Schreiber*). Fra i possibili gruppi di ω quantità scelte fra le n considerate, bisogna poi trovare (e questo si fa per tentativi) quello pel quale il peso di F risulta massimo fra i massimi.

Più difficile è il problema nel caso in cui si debba render massimi i pesi di *due* funzioni ad un tempo. In tal caso l'annullarsi di un certo numero dei g non dà più luogo a massimi relativi, e la soluzione non può ottenersi che per calcoli di successiva approssimazione. Le formole, sia per questo che pel precedente caso, sono estesamente svolte dall'A., ed è poi fatta applicazione del 1° caso alla determinazione indiretta di un lato per mezzo di un quadrilatero geodetico, e del 2° caso al problema della più opportuna ripartizione dei pesi sugli angoli di un triangolo, del quale due vertici sono esattamente conosciuti di posizione, allo scopo di render minimo l'error medio di posizione del terzo vertice.

P. Pizzetti.

F. Ebner. *Leitfaden der technisch wichtigen Kurven.* Mit 93 Figuren im Text. 8° p. VIII-197 Leipzig, Teubner 1906. [Prezzo del vol. leg. Mk. 14].

Il movimento di una figura piana nel proprio piano è pienamente determinato quando si conoscono le traiettorie di due qualunque dei suoi punti, chè allora è individuata e costruibile la linea descritta da un terzo punto qualunque di quella figura. I casi più semplici che si possono immaginare sono quelle in cui le linee determinatrici del movimento siano *a*) due rette, *b)* una retta ed una circonferenza, *c*) due circonferenze. Nel primo caso è noto sino dall'antichità che ogni punto del piano mobile descrive una ellisse; nel secondo nascono invece delle curve di

Digitized by Google

quarto ordine; e nel terzo delle importanti curve di sest'ordine, le cui bellissime proprietà furono scoperte da S. Roberts e A. Cayley. A queste tre categorie di movimenti sono consacrati i primi tre Capitoli dell'opera del sig. Ebner; in essi sono esposte le principali proposizioni relative sotto forma elementare (probabilmente per non accedere ad un campo troppo elevato l'A. non considerò mai il genere delle curve da lui incontrate ed ha taciute le belle applicazioni che le funzioni ellittiche ricevettero nella teoria del quadrangolo articolato) ed incidentalmente sono corrette delle inesattezze in cui incorsero alcuni trattatisti di cinematica; in pari tempo è completato quello che sta scritto nell'opera dello scrivente sulle curve piane speciali (opera il cui vasto piano vietò i minuti particolari) ed anche la parte geometrica di ben noti trattati di cinematica. Non vanno dimenticate le molte e belle figure, relative tanto alle suddette curve (in generale ed in casi speciali) quanto ad altre di ordine 6^o, 8^o o 10^o.

Gli altri due Cap. del lavoro del sig. Ebner hanno (specialmente il VI) un legame assai scarso coi due precedenti. Uno concerne le parabole e le iperboli di grado qualunque, le quali ottennero l'accesso in grazia di applicazioni pratiche che ricevettero; da notarsi che l'A. non presuppose nel lettore la conoscenza del calcolo infinitesimale, onde trattò direttamente le questioni concernenti le tangenti e l'area di dette curve.

Il V ed ultimo capitolo concerne le curve generate dal movimento del piano di un circolo che ruzzola sopra un cerchio fisso del suo piano; la trattazione è ispirata alle idee del Prof. Schilling e poco aggiunge a quanto contengono su quelle notissime curve i migliori trattati di analisi applicata alla geometria piana. Sarebbe stato opportuno, data l'indole cinematica di tutto il libro, di far almeno cenno delle curve generate quando una curva qualsivoglia ruzzola sopra una curva fissa del suo piano, chè così si sarebbe potuto dar notizie altro metodo per descrivere le curve piane, analogo ma ben più generale di quello considerato nell'esordio.

G. L.

C. F. Gauss. *Werke. VII Band herausgegeben von der K. Gesellschaft zu Göttingen*, Leipzig, Teubner, 1906. 4° p. 650. [Prezzo Mk. 30].

Mentre, come è noto, i primi sei volumi di quest'edizione risalgono ad una trentina d'anni fa, il proseguimento di essa venne ripreso soltanto nel 1900 anno in cui apparve l'VIII vol. (cfr. *Bollettino*, III, 1900, p. 118), mentre il IX fu pubblicato nel 1903 (Id. VII, 1904, p. 122); col volume VII, che oggi annunciamo, resta quasi totalmente compiuta la pubblicazione di cio che si trovò di inedito fra i ms. di Gauss. Il suo contenuto è astronomico onde collegasi naturalmente

Digitized by Google

al VI e consiste principalmente alla *Theoria motus corpum coelestium*, la cui celebrità e rinomanza ci sembra sufficientemente attestata da ciò che nell'*Index du Répertoire bibliograpique des sciences mathématiques publié par la Commission permanente du Répertoire* vi è una rubrica semplicemente intitolata: « theoria motus »! Inoltre il volume in discorso racchiude un gran numero di notizie inedite ed un capitolo sul moto parabolico che Gauss destinava a costituire un Supplemento alla *Theoria motus*. Malgrado il valore di tali aggiunte, l'interesse degli astronomi si concentrerà indubbiamente sopra i lavori di Gauss concernenti le perturbazioni di Pallade; è noto che riguardo ad esse Gauss nelle *Gotting. gelehrte Anzeige* del 25 aprile 1812 aveva fatta la seguente comunicazione: « Fra i risultati assai notevoli, uno è del massimo interesse. Per nostre ragioni lo esponiamo qui con le seguenti cifre, di cui a suo tempo verrà data la chiave: 11110001001010O1 » Ora la spiegazione di tale enigma non si è finora trovato e probabilmente non si rinverrà mai; il risultato però a cui Gauss allude è indicato nella lettera a Bessel del 5 maggio 1812, e consiste nell'essere razionale (= 7:18) il rapporto dei movimenti medi di Giove e Pallade. Ma riguardo a ciò Gauss non pubblicò nulla. Eppure l'Accademia delle Scienze di Parigi aveva posto, appunto in quel torno di tempo, come tema di concorso precisamente le perturbazioni di Pallade e protrasse fino al 1816 la scadenza sperando sempre che Gauss scendesse nell'arringo. Che egli vi pensasse seriamente risulta, ancor più che da alcuni passi del suo carteggio, da un lungo lavoro, che ora per la prima volta vede la luce, scritto in francese ed intitolato: *Exposition d'une nouvelle méthode de calculer les perturbations planétaires avec l'application au calcul numèrique des perturbations du mouvement de Pallas*: probabilmente la proverbiale incontentabilità di Gauss lo sconsigliò di concorrere.

Chiuderemo questo annunzio citando del vol. in discorso una teoria della luna, fino ad oggi inedita, assai simile a quella che tanta fama diede al nostro Plana.

Il futuro X volume chiuderà la collezione delle opere di Gauss; esso conterrà poche cose tuttora inedite, alcune notizie bibliografiche, una relazione sull'Archivio Gauss esistente a Gottinga ed un esteso indice generale. Auguriamo di poterlo presto annunziare.

L. G.

G. Loria. *Vorlesungen über darstellende Geometrie.* Autoriserte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von F. Schütte. I Teil: Die Darstellungsmethoden Leipzig und Berlin. B. G. Teubner, 1907; 8° gr., p. XI + 220. Prezzo Mk. 6,80].

Il Loria, in questo primo volume presenta ulteriormente elaborata la parte delle sue lezioni universitarie di *Geometria descrittiva*, che riguarda i *metodi di rappresentazione*.

Digitized by Google

Fra la veduta di coloro che, auspice il FIEDLER, non vogliono separata la *Descrittiva* dalla *Geometria di posizione*, e la opposta tendenza che mette a capo a relegarla fra le discipline tecniche, il LORIA assume qui una posizione intermedia. Egli considera la *Geometria descrittiva* come la teoria matematica delle rappresentazioni dello spazio su di un piano; e mentre da una parte trae profitto non meno dai metodi della Geometria analitica che dai procedimenti sintetici, esclude d'altro canto dal suo programma quegli argomenti che hanno carattere più determinatamente tecnico, quali la teoria delle ombre, la gnomonica, ecc.

Il libro comincia con una breve introduzione, in cui si discorre della natura e degli scopi della *Geometria descrittiva*, e dell'uso degli strumenti del disegno, a proposito dei quali l'A. accenna alle costruzioni fondamentali della Geometria del compasso e ai principi della Geometrografia.

Si passa quindi senz'altro ai metodi di rappresentazione; e l'A., ispirandosi al criterio didattico più naturale e fecondo, segue nella sua trattazione lo svolgimento storico della disciplina, esponendo nel *I Libro* (pag. 3-88) [1] il metodo del MONGE al quale, con piena ragione, assegna il posto d'onore. Egli si limita alla risoluzione dei problemi relativi a punti, rette e piani; ma nessuna questione è trascurata, e ogni gruppo di problemi è discusso con ordine rigoroso e con assidua cura di ogni particolare, talchè nulla manca di quanto si richiede per fornire al giovane studioso la conoscenza completa e sicura del metodo delle proiezioni ortagonali. Numerosi esercizi sono intercalati nel testo; e, lungo il cammino vien dato un cenno rapido ma preciso di altri metodi di rappresentazione, che a quello del Monge in qualche modo si riattaccano, come la cosidetta *prospettiva militare* e i *metodi clinografici* (parallelo e centrale) del PESCHKA. Va ancora ricordato il largo uso che l'A. fa vantaggiosamente del terzo piano di proiezione; dal che trae ripetutamente occasione a raffronti fra il metodo analitico cartesiano. Il libro si chiude appunto con un parallelo fra i due metodi, e con un notevole gruppo di problemi a dati numerici di cui si richiede la soluzione con ambedue i procedimenti.

---

(1) Riporto qui i titoli dei Capitoli di questo I Libro: I. Osservazioni intorno alle proiezioni ortogonali. — II. Generalità sul metodo di Monge. Rappresentazione del punto. — III. Rappresentazione delle rette. Loro traccie. — IV. Rappresentazione del piano. — V. Introduzione di un terzo piano di proiezione. — VI. Problemi fondamentali della geometria di posizione. — VIII. Rette e piani fra loro perpendicolari. — IX. Ribaltamenti e lor uso nella soluzione di problemi metrici. — X. Altri problemi metrici. — XI. Altri artifici per risolvere problemi metrici.

(2) I. Generalità. Rappresentazione di punti, rette e piani. — II. Quote ed inclinazioni. — III. Problemi di posizione. — IV. Rette e piani fra loro perpendicolari. — V. Ribaltamenti. — VI. Cambiamento degli elementi di riferimento e movimenti delle figure obbiettive. — VII. Passaggio dal metodo della proiezione centrale al metodo di Monge e viceversa.

Digitized by Google

Il *II Libro* (pagg. 89-146) [2] è dedicato alla ***proiezione centrale***, e si svolge entro i medesimi confini e secondo gli stessi criteri del primo. Ricorderò come qui l'A. accenni in particolare ai metodi delle ***proiezioni bicentrale*** e ***stereoscopica***.

Procedendo oltre e completando i cenni già dianzi dati, l'A. al principio del *III Libro* (pagg. 147-163) [1] considera la ***proiezione generale centrale***, ed enumera i più importanti metodi descrittivi che da quella derivano, mediante una scelta speciale degli elementi di rifemento. Tra essi rileva in particolare il ***metodo delle proiezioni quotate*** e lo applica alla risoluzione dei problemi fondamentali.

Il IV libro (pagg. 164-203) [2] espone, in forma notevolmente diffusa, i ***metodi assonometrici***. Cominciando dalla ***Assonometria ortogonale***, l'A., dopo aver stabilite e discusse le relazioni fra le costanti assonometriche, dimostra i bei teoremi dello SCHLMÖILCH (proporzionalità fra i quadrati dei rapporti di accorciamento e le distanze dei piedi delle altezze nel triangolo delle traccie assonometriche) e dello SCHWARZ (determinazione dei rapporti di accorciamento mediante due diametri coniugati e la distanza focale di un'ellisse) e mette quindi in luce, sui problemi fondamentali, la utilità della assonometria come metodo di rappresentazione. Passando poi all'assonometria obliqua, ne svolge i principi, dimostra per via elementare, sulla traccia dello SCHWARZ, il fondamentale teorema del POHLHKE e dà un cenno della ***prospettiva cavaliera***. Da ultimo, definita l'assonometria centrale, studia le relazioni fra le costanti assonometriche e le costanti di orientazione, e finisce con un accenno generale alla ***prospettiva di rilievo***.

Giungiamo così al V ed ultimo libro (pagg. 204-218) [3] il quale conferisce a queste lezioni un notevole carattere di novità, in quanto con esso vengono assunti per la prima volta a far parte di un trattato scolastico di geometria descrittiva, ***i principii della fotogrammetria teorica***. L'A., premesse alcune considerazioni sussidiarie (sulla conica *capace* di un dato birapporto e sul modo di porre in posizione prospettiva due date forme di 1ª specie proiettive) discute e risolve il primo problema fondamentale della fotogrammetria, cioè la determinazione della prospettiva, su di cui un piano da un centro dato, id una figura, di cui siano note due diverse posizioni centrali.

Passa quindi al secondo problema fondamentale, cioè alla ricostruzione di una figura di cui si conoscano n proiezioni centrali (da centri

---

(1) I. Modificazioni del metodo della projezione centrale. — II. Applicazioni del metodo dei piani quotati ad alcuni problemi.

(2) I. Assonometria ortogonale. Formole e problemi fondamentali. — II. Problemi fondamentali dell'assonometria ortogonale. — III. L'assonometria ortogonale come metodo di rappresentazione. — IV. Assonometria obbliqua. — V. Assonometria prospettiva.

(3) I. Definizioni e proposizioni sussidiarie. — II. Costruzioni fondamentali. — III. Determinazione d'una figura col mezzo di sue projezioni.

Digitized by Google

di vista ignoti); e discutendo successivamente le ipotesi $n=1$, $n=2$, $n=3$, giunge, per via di induzione, al noto e saliente resultato che una figura è determinata di forma (non di grandezza) quando ne siano note quattro proiezioni centrali (1).

I metodi descrittivi, successivamente elaborati sotto l'impulso delle esigenze tecniche, sono così esposti in un quadro armonico e completo; e l'ordine storico, che l'A. ha scelto a reggere l'aspetto della sua trattazione, mette in chiara luce, traverso la molteplicità dei singoli procedimenti, la fondamentale unità della disciplina. Per l'ampiezza e l'ordine del contenuto non meno che per la chiarezza della esposizione queste lezioni costituiscono un ottimo trattato, e già esse, sotto gli auspici del Teubner che le accolse nella sua « Collezione », si vanno diffondendo con successo in Germania. A me quindi non resta se non rammaricare che, insieme con la traduzione tedesca, non sia anche uscito in luce, a vantaggio delle scuole nostre, l'originale italiano.

UGO AMALDI.

E. J. WILCZYNSKI. *Projective differential Geometrie of Curves and ruled Surfaces.* Leipzig, (B. G. Teubner, 1906; gr. 8°, pagg. IV-298. [Prezzo Mk. 10].

In una serie di Memorie pubblicate dal 1901 al 1904 nelle *Transactions of the American mathematical Society* l' A. ha generalizzato ai sistemi di equazioni differenziali lineari in più funzioni di una variabile la teoria degli invarianti di una sola equazione differenziale lineare, cui contribuirono il Laguerre, il Brioschi, il Forsyth, il Lie ed altri, ma che notariamente è sovratutto dovuta allo Halphen. Nel presente volume l' A. raccoglie e coordina le sue proprie ricerche, ulteriormente elaborate, e i resultati classici dianzi ricordati, che egli qui stabilisce con procedimenti uniformi e spesso personali.

Prende, naturalmente, le mosse dal teorema dello Stäckel sulle più generali trasformazioni che permutano fra loro le equazioni differenziali lineari, e lo generalizza, determinando il più ampio gruppo (continuo infinito) che trasforma ogni sistema di n equazioni differenziali lineari in m funzioni incognite di una unica variabile in un sistema analogo (Cap. I). Tratta quindi dapprima il caso di una sola equazione differenziale lineare di ordine qualsiasi; e, determinatine coi metodi del Lie i seminvarianti e semicovarianti (cioè gli invarianti e covarianti rispetto a quel sottogruppo eccezionale infinito del gruppo

(1) Questo libro riproduce, all'infuori di lievi modificazioni, il lavoro dell'A.: *Fondamenti geometrici della Fotogrammetria* (*Giorn. di Mat.*, vol. 41, 1903).

Digitized by Google

totale, che lascia inalterata la variabile indipendente) deduce di qui gli invarianti e covarianti propriamente detti, che classifica secondo il grado e il peso e passa quindi alla loro interpretazione geometrica (Cap. II), che approfondisce particolarmente nel caso del terzo ordine; studia cioè le proprietà differenziali proiettive delle curve piane (Cap. III).

Passando poi ad esporre le ricerche sue proprie, prende a considerare in modo speciale un sistema di due equazioni differenziali lineari del second'ordine in due funzioni di una variabile e calcolatine dapprima i seminvarianti e semicovarianti, poi gli invarianti e covarianti fondamentali (Cap. IV), assume a rappresentare la soluzione generale del sistema la superficie rigata delle congiungenti i punti omologhi di due curve integrali particolari quali si vogliano; e mostra come a sistemi differenziali equivalenti (rispetto al solito gruppo infinito) corrispondano superficie rigate fra loro proiettive. Poichè egli di più assoda la invertibilità di questo resultato, resta senz' altro stabilita l'equivalenza fra la teoria invariantiva dei sistemi binari di equazioni differenziali lineari del second'ordine in due funzioni incognite di una variabile e la geometria differenziale proiettiva delle superficie rigate. Alla interpretazione dianzi accennata l'A. associa la interpretazione analitica, e, combinando l'una con l'altra, giunge nel modo più naturale al sistema differenziale aggiunto del sistema dato.

Dopo di che passa a studiare diffusamente la geometria proiettiva delle rigate, e stabilisce anzitutto il teorema fondamentale relativo al sistema degli invarianti che definiscono, a meno di trasformazioni proiettive, una superficie rigata (Cap. V). La interpretazione dei covarianti fondamentali conduce l'A. dapprima alla considerazione di quella superficie rigata che egli chiama *derivata* della primitiva *rispetto alla variabile indipendente*, in quanto caratterizza la variabile indipendente del sistema differenziale dato, poi allo studio della *linea* e della *superficie* (rigata) *flecnodali* vale a dire della curva (generalmente a due rami) dei flecnodi o punti in cui la rigata ammette una tangente quadripunta, e della superficie generata da codeste tangenti quadripunte (Cap. VI). Nei due capitoli successivi, riussunte rapidamente le nozioni fondamentali della Geometria della retta (Cap. VII), forma la equazione differenziale lineare del sesto ordine, cui soddisfano le coordinate omogenee di una generatrice variabile sulla rigata, e, messo in luce come gli invarianti di essa siano esprimibili per mezzo degli invarianti del sistema binario del secondo ordine che definisce la superficie, ritrova sotto forma invariantiva le condizioni, in parte già note, perchè una rigata appartenga ad un complesso o ad una rigata lineare (Cap. VIII). Un nuovo ente covariante che qui l'A. introduce è la congruenza delle generatrici di prima specie degli iperboloidi osculatori, che egli chiama *congruenza flecnodale* (in quanto ammette come superficie focali le due falde della

Digitized by Google

superficie flecnodale) e intorno a cui sviluppa una lunga e completa serie di resultati geometrici spesso veramente notevoli, che sarebbe difficile il riassumere in questo rapido cenno (Cap. IX e X).

Vengono di poi considerate in modo particolare le rigate, su cui i due rami della curva flecnodale coincidono (Cap. XI), e viene svolta la teoria generale delle curve appartenenti ad una rigata, in base alle relazioni che intercedono fra il sistema differenziale binario della rigata e la equazione differenziale lineare, relativa ad una curva considerata su di essa (Cap. XII). I due ultimi Capitoli infine (XIII e XIV) sono dedicati alle proprieta differenziali proiettive delle curve dello spazio, dedotte, naturalmente, dalla interpretazione degli invarianti e covarianti di una equazione differenziale lineare del quarto ordine.

Alla fine di ciascun Capitolo sono raccolti numerosi problemi, di cui la più gran parte hanno carattere di semplici esercitazioni, ma alcuni sono proposti dall' A. come argomenti degni di studio. Egli richiama così l'attenzione dei matematici sugli ulteriori campi di ricerca, che restano ancora inesplorati in queste teorie. Ad ogni modo il contributo di resultati, che il Wilczynski ha ad esse recato è indubbiamente notevolissimo e senz'altro degno di essere raccolto in una trattazione sistematica, quale è data nel presente volume.

UGO AMALDI.

E. CZUBER, *Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung*. Zweiter Band. Zweite, sorgfältig durchgesehene Auflage. Leipzig, Teubner. 1906. 8°, p. VIII + 532. (Prezzo del vol. leg. Mk. 12).

Ci limitiamo ad annunciare semplicemente questa seconda edizione del 2° volume del trattato di Czuber, la quale non presenta differenze rilevanti rispetto alla prima (su questa v. *Bollettino*, T. II, 1899, p. 102).

G. VIVANTI.

J. C. FIELDS, *Theory of the algebraic functions of a complex variable*. Berlin, Mayer & Müller, 1906, 4°, p. VII + 186.

« La teoria delle funzioni algebriche sviluppata nelle pagine se-
« guenti è algebrica nel suo metodo e perfettamente generale. Essa
« vale per ogni equazione algebrica riducibile o irriducibile, per quanto
« complicate siano le sue singolarità e qualunque sia il loro compor-
« tamento all'infinito ». Così l'autore nella sua prefazione. Per dare un'idea esatta del metodo da lui seguito, sarebbe necessario un largo corredo di definizioni e di formole, che mal troverebbe posto in questo

Digitized by Google

periodico. Quanto ai risultati, essi, fatta astrazione dalla forma, coincidono in gran parte con quelli conosciuti; però farebbe opera molto utile chi intraprendesse un esame minuto di questo volume, -- esame reso più difficile dalla mancanza quasi completa di referenze agli scritti di altri autori, — per sceverare ciò che vi ha in esso di essenzialmente nuovo.

G. VIVANTI.

W. F. OSGOOD. *Lehrbuch der Funktionentheorie*. Erster Band, Zweite Hälfte. Leipzig, B. G. Teubner, 8°, p. I-XII, 307-642. (Prezzo Mk. 7,60).

La lettura di questo secondo fascicolo ci ha confermati nel giudizio che abbiamo dato esaminando il primo (*Boll.* T. IX, 1906, p. 116-117). Anche qui l'autore si propone, più che di esporre, di insegnare a chi legge i fondamenti della teoria delle funzioni; egli fa sempre precedere alla trattazione delle questioni generali quella di qualche caso particolare interessante, e spesso aggiunge anche dei problemi di cui lascia la risoluzione al lettore, dandogli tutt'al più qualche indicazione sommaria sul modo di giungervi.

Poste nel 1° fasc. le basi della teoria delle funzioni, si passa nel 2° (C. VIII) allo studio delle funzioni polidrome per mezzo delle superficie di Riemann; alcuni esempi caratteristici ed opportunamente scelti preparano allo studio generale della superficie di Riemann relativa ad una funzione algebrica qualunque. L'Autore si propone poscia (C. IX) la questione, se il campo d'esistenza d'una data funzione analitica non possa eventualmente venire ampliato, ed è condotto per tal modo ai concetti di continuazione analitica e di funzione monogena.

Il resto del volume è dedicato alle applicazioni.

Nel C. X viene svolta la teoria delle funzioni semplicemente e doppiamente periodiche. Il C. XI contiene gli sviluppi di queste funzioni in somme di frazioni semplici e in prodotti infiniti, le relazioni fondamentali tra le funzioni p, ζ, σ, i teoremi di Weierstrass e Mittag-Leffler e le loro generalizzazioni, e il teorema di Runge sulla espressione d'una funzione analitica come somma di infinite funzioni razionali. Nel C. XII si definiscono mediante equazioni differenziali le funzioni logaritmiche, esponenziali e trigonometriche, e si dimostra che queste ultime coincidono colle funzioni monoperiodiche già trattate. Infine il C. XIII è dedicato al potenziale logaritmico. Dopo aver ricordati i problemi fisici che conducono all'equazione di Laplace per il piano, l'Autore stabilisce i teoremi fondamentali relativi al potenziale logaritmico, distinguendoli in tre gruppi: quelli che si deducono direttamente dall'equazione di Laplace (teorema della media, unicità, invariantività), quelli che si basano sull'espressione di una funzione armonica di due variabili mediante un integrale definito (funzione di

Digitized by Google

Green, integrale di Poisson, derivabilità, etc.), e quelli che esigono l'uso degli sviluppi in serie (continuazione armonica). Segue il teorema d'esistenza, dimostrato col metodo alternante; e il volume si chiude col teorema di Picard sulle funzioni intere e col teorema di Poincaré sulla esprimibilità di due variabili legate da una relazione analitica come funzioni uniformi di una terza variabile.

G. VIVANTI.

E. MAILLET. ***Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions***. Paris, Gauthier-Villars, 1906, p. V + 275. 8° (Prezzo L. 12).

Di quest'opera del giovane e valoroso analista francese ci eravamo proposti di dare un largo riassunto, quale lo meritano la novità, l'importanza e la *suggestività* del suo contenuto. Senonchè essa è talmente irta di formole in ogni sua parte, che abbiamo dovuto rinunciare all'impresa, e limitarci a presentare soltanto un breve sommario desunto in parte dalla prefazione dell'Autore. Con ciò non ci lusinghiamo di poter dare ai lettori un'idea adeguata della materia trattata in quest'opera, ma piuttosto di eccitare qualcuno di essi a studiarla profondamente ed a proseguire le ricerche a cui eminentemente si presta un campo così nuovo e fecondo.

Comincia l'Autore (C. 1) col ricordare le proprietà fondamentali delle frazioni continue aritmetiche, e collo stabilire una classificazione di esse per *ordini*, fondata sulla maggiore o minore rapidità di crescenza dei denominatori. Segue (C. 2) un ben noto teorema dovuto a Liouville, che definisce una classe estesa di numeri trascendenti detti appunto *di Liouville*; l'Autore dà una generalizzazione notevole di questo teorema. Importanti sono certe classi di numeri di Liouville che si riproducono mediante le quattro operazioni aritmetiche (C. 3).

Ogni numero reale può considerarsi (C. 4) come radice di una funzione intiera a coefficienti razionali, e inversamente ogni numero reale può esprimersi mediante una serie a coefficienti interi (reali o imaginari) ordinata secondo le potenze d'una quantità arbitraria reale o imaginaria. Analoghi risultati si hanno per le frazioni continue. Si dice (C. 5) *funzione generatrice* di numeri trascendenti ogni serie a coefficienti razionali che per argomenti razionali prende valori trascendenti. Ritorna poi l'Autore all'argomento, già toccato sotto forme alquanto diverse, della classificazione dei numeri reali (C. 6), e stabilisce (C. 7), in base ai risultati precedenti la trascendenza — a meno di casi particolari — di certe frazioni continue che egli dice *quasi-periodiche*; espone (C. 8) due teoremi generali sulle radici delle equazioni trascendenti; dimostra (C. 9) la trascendenza di e e π, trattenendosi alquanto sul significato del problema della quadratura del

Digitized by Google

cerchio; discute (C. 10, 11, 12) l'estensione alle serie a coefficienti razionali delle proprietà dei polinomi aventi coefficienti della stessa natura.

Il volume termina con tre note dedicate alla classificazione delle funzioni intere, alle proprietà dei numeri di Liouville relative all'ordine, alle funzioni *ipertrascendenti*, cioè che non soddisfanno ad alcuna equazione algebrico-differenziale, e con una breve bibliografia delle funzioni intere.

G. VIVANTI.

N. NIELSEN. ***Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten.*** Leipzig, Teubner, 1906, p. VI-106, 8°. (Prezzo Mk. 3,60).

Di questo interessante opuscolo sarebbe impossibile dare un resoconto particolareggiato, senza riportare molte delle numerosissime formole che esso contiene, e che ne formano la parte essenziale. Ci limiteremo pertanto a un brevissimo cenno.

Posto:

$$Q(x, \nu) = \int_x^\infty e^{-t}\, t^{\nu-1}\, dt\,,$$

il *logaritmo integrale* si definisce così (C. 1):

$$li\,(e^{-x}) = -\,Q(x, 0)\,;$$

insieme ad esso si considerano altre cinque funzioni:

$$ci(x) = \frac{li\,(e^{ix}) + li\,(e^{-ix})}{2}\,,\quad si(x) = \frac{li\,(e^{ix}) - li\,(e^{-ix})}{2\,i}\,,$$

$$L(x) = \frac{1}{2}\,Q\left(x^2, \frac{1}{2}\right)\,,\quad C(x) = \frac{\varepsilon_1 L(x\,\varepsilon) + \varepsilon\, L(x\,\varepsilon_1)}{2}\,,$$

$$S(x) = \frac{\varepsilon\, L(x\,\varepsilon_1) - \varepsilon_1 L(x\,\varepsilon)}{2\,i}\,,$$

dove:

$$i = e^{\frac{\pi i}{2}}\,,\quad \varepsilon = e^{\frac{\pi i}{4}}\,,\quad \varepsilon_1 = e^{-\frac{\pi i}{4}}\,.$$

Queste funzioni possono esprimersi in forma di integrali definiti (C. 2); p. es.:

$$li\,(e^{-x}) = C + lg\,x + \int_0^x \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt\,,$$

dove C è la costante di Eulero. La generalizzazione delle espressioni trovate conduce con molta facilità al calcolo di vari integrali già noti. Importante è il seguente teorema, che comprende come caso speciale

Digitized by Google

un teorema stabilito da Bessel: Se $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sono due polinomi in x, e se tutte le radici reali di $\psi(x)$ sono negative, l'integrale:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-tx}\,\varphi(t)\,dt}{\psi(t)},$$

dove la parte reale di x si suppone positiva, può esprimersi in forma finita mediante logaritmi integrali.

Segue la rappresentazione delle funzioni considerate per serie asintotiche e per frazioni continue (C. 3), e il calcolo di molti integrali definiti in cui esse figurano sotto il segno d'integrazione (C. 4). Il C. 5 è dedicato allo studio di certi particolari sviluppi in serie, e il C. 6 alle formole che servono pel calcolo numerico del logaritmo integrale e delle altre trascendenti.

G. VIVANTI.

S. ORTU CARBONI. *Matematica Finanziaria, operazioni a breve ed a lunga scadenza.* 8° gr. p. XX-522 e Tavole per i calcoli a sette decimali. Edito da G. B. Paravia, 1907. (Prezzo L. 12).

« Questo libro... si rivolge tanto a coloro che coltivano gli studi di finanza in uno dei nostri istituti superiori o professionali, quanto a chi, pur avendo lasciato le scuole, intenda occuparsi di operazioni finanziarie non con grossolano empirismo, ma con quella sicurezza di esame scientifico e con quella larga cognizione dei sistemi di finanza, le quali sono oggi volute dalla stessa pratica finanziaria. E, per questa, espone le basi matematiche speciali, su cui sono fondate le norme di Computisteria e Ragioneria, e dice, della parte pratica delle operazioni finanziarie, quanto è sufficiente per intendere la necessità delle teorie matematiche ».

E la *necessità delle teorie matematiche* nella trattazione delle questioni di finanza, è ampiamente dimostrata dall'A. nei capitoli II-V che esamineremo rapidamente.

Il Cap. II contiene i *Fondamenti della teoria dell'interesse.* Essendo i l'interesse del *capitale unitario* alla *fine* di un dato periodo di tempo (*anno*, ecc.) e n il numero (intero, necessariamente) dei periodi di tempo durante i quali il capitale unitario sta impiegato,

$$1 + n\,i \quad , \quad (1+i)^n$$

rappresentano il *montante*, rispettivamente nell'*interesse semplice* e in quello *composto discreto*. L'identità

$$(1+i)^n = \left\{1 + \left(\sqrt[k]{1+i} - 1\right)\right\}^{n\,k}$$

esprime come si possa (cambiando le condizioni di frutto e di capi-

Digitized by Google

talizzazione) passare dal periodo *1* di tempo al periodo $\frac{1}{k}$ (con k intero, necessariamente) e quindi come si possa ***interpretare*** il montante $(1+i)^n$ per n non intero ma razionale. Infine, l'identità

$$(1+i)^n = e^{n \log (1+i)} = e^{n\delta}$$

esprime come si possa passare dall'interesse composto *discreto* a quello *continuo*, essendo $\delta = \log (1+i)$ l'importantissimo elemento *pratico* che chiamasi *forza dell'interesse* o *saggio istantaneo* e che dà, in sostanza l'*intensità della capitalizzazione*.

La base matematica delle questioni di finanza è resa fin d'ora evidente; ma riceve conferma nei capitoli seguenti.

Nel Cap. III con i *montanti* e *valori attuali* delle *annuità certe* di diverse categorie (*costanti, variabili, temporanee...*). Nel Cap. IV con i *prestiti a titolo unico ed individuale*, e loro applicazioni ad alcuni tipi di rendite degli stati. Nel Cap. V con i *prestiti a più titoli*, e le loro applicazioni a titoli di rendita, lotterie, ecc.

Come la matematica serva mirabilmente alla risoluzione di queste questioni, è messo ben in luce dall'A., sia con numerosi esempi numerici ai quali applica o il calcolo diretto (con logaritmi) o il calcolo indiretto mediante tavole speciali, sia con qualche rappresentazione grafica delle leggi considerate.

Le *prenozioni* matematiche necessarie al lettore per intendere il libro, sono quelle che si ricevono nelle scuole medie superiori, più quelle svolte dall'A. nel Cap. I. Quindi il libro è facilmente intelligibile a coloro che hanno compiuto gli studi secondari nelle nostre scuole. E poichè fra questi l'A. ritiene, giustamente, di dover avere il maggior numero di lettori, si comprenderà facilmente come certi minuziosi sviluppi, *superflui per chi ha discreta pratica del calcolo algebrico*, si rendano necessari. Ma di ciò si dovrebbe tener conto nel *futuro* riordinamento degli studi medi; la dominante matematica classica, noiosa e infeconda, ha fatto il suo tempo, e come *cultura generale* si può ben esigere una *buona pratica del calcolo algebrico*, base necessaria di tutta la matematica e di numerose questioni pratiche, nonchè base della geometria che non perderà della sua *purezza* classica assogettandosi ad un *calcolo geometrico intrinseco*. Se l'A. avesse avuto lettori in tali condizioni, avrebbe potuto raggiungere più rapidamente lo scopo propostosi e esaminare le questioni di *approssimazioni* (quasi bandite dalle nostre scuole) necessarie quando si fa uso di *tavole* o di *interpolazioni* e praticamente utili perchè in un calcolo di finanza ha importanza il sapere se l'*errore* è minore di una o di mille lire.

Un'osservazione che non toglie al libro nessuno dei suoi meriti. Mi pare che le *notazioni* siano alquanto complicate; come, ed es. quelle a pag. 151 per le annuità. E' ben vero che i prospetti riassuntivi alla fine di § facilitano la lettura, ma non è men vero (e può

Digitized by Google

sembrare un paradosso) che, se le notazioni complicate non danno noia al *matematico* perchè non le legge, pur studiando il libro, esse riescono difficilissime al non matematico appunto perchè pretende di leggerle e crede di doverle leggere. L'inconveniente, se pure esiste, si può togliere facilmente.

Nel Cap. VI l'A. dà alcune nozioni di calcolo differenziale e ne fa applicazione ad alcune questioni di finanza. Però nella prefazione egli dice: « *Ma il lettore ritenga come cosa indiscutibile, che, se non vuole accontentarsi di conoscere poche formule del cap. VI per semplice ed inutile erudizione deve studiare con una certa cura le proprietà fondamentali d'Analisi infinitesimale, prima di esaminare le applicazioni di esse alla « Matematica finanziaria »*. Non si può certo dissentire da quanto dice l'A., nè si può dargli torto di aver messo sul Cap. VI nozioni insufficienti e, talvolta, tanto brevemente enunciate da lasciar dubbi sulla loro esattezza. Il torto è dell'ordinamento attuale dei nostri studi secondari. Verrà il giorno che accanto al Liceo letterario si avrà, come in Francia, il Liceo scientifico? E se si avrá questo Liceo scientifico la matematica resterà legata al tradizionale carretto dei classici o si piegherà alle esigenze pratiche moderne? Il tempo che si fa perdere ora ai nostri giovani con lo studio di certi pretesi *fondamenti* e di una *nomenclatura esuberante*, può ben essere destinato al calcolo algebrico o allo studio dei fondamenti pratici del calcolo infinitesimale, che in se non ha nulla di *superiore* ma lo acquista solo in virtù di qualche astrusa esposizione. Con tali fondamenti quante questioni di geometria di fisica e anche di chimica si risolvono rapidamente! quante questioni pratiche che il calcolo finito nasconde sotto enormi sviluppi vengono fuori semplicemente dal calcolo differenziale!

Anche la matematica finanziaria verrebbe così grandemente semplificata; la *forza d'interesse* usata sistematicamente semplifica tutte le questioni: anzi con i *valori medi* dà rapida soluzione a questioni pratiche nelle quali un tasso d'interesse *determinato*, fisso o variabile col tempo, si presenta artificialmente, portato dal calcolo finito, mentre la questione pratica ha come dato soltanto un tasso medio. All'A. l'augurio di poter rifare, bene come questa volta, il suo libro con questi nuovi elementi forniti dalla scuola media superiore.

C. Burali-Forti.

V. Volterra. *Léçon sur l'intégration des équations differentielles aux dérivées partielles professées à Stockholm* (février-mars 1906) *sur l'invitation de S. M. le Roi de Suède*. Upsal 1901. 4° p. 82.

Riassumere degnamente queste lezioni dell'illustre analista non è possibile, tanti e così svariati ed importanti sono gli argomenti, che vi sono studiati. Mi accontenterò di dare un sommario di queste

Digitized by Google

lezioni, ove si trovano condensati i metodi e i risultati, di cui il professor V. Volterra arricchì l'analisi con le proprie ricerche, e che saranno di grande ausilio a chi voglia orientarsi nell'Analisi moderna.

Le lezioni 2, 3, 4, riassumono le recenti note del prof. V. Volterra sulla teoria dell'elasticità, in cui è stato studiato il fatto così interessante che un corpo elastico non connesso semplicemente può essere sottomesso a tensioni interne. pur non essendo soggetto a forze esteriori: e ciò in causa delle polidromie, che possono in tal caso presentare gli spostamenti. Sono specialmente interessanti le interpretazioni meccaniche che vengono date di tale ordine di fatti.

La lezione quinta riassume le idee fondamentali, che possono servire allo studio delle funzioni di linee, e mostra come con tali funzioni si possa estendere allo spazio a tre dimensioni la teoria delle funzioni armoniche coniugate. Delle svariate generalizzazioni, che si possono fare di queste idee, l'Autore dà brevi cenni nella lezione sesta.

La lezione settima si occupa delle rappresentazioni analitiche delle quantità F, che dipendono da tutti i valori di una funzione continua in un dato intervallo, mediante sviluppi in serie, analoghi in un certo senso a quelli di Taylor. E si generalizza in modo assai elegante la equazione integrale di Fredholm. Sarebbe assai importante il poter approfondire la convergenza delle serie così introdotte.

Le lezioni ottava e nona riassumono i principali degli ormai classici risultati dell'A. sulla estensione della teoria delle caratteristiche, con un rapido cenno delle applicazioni del metodo delle immagini, dei lavori della Kowalevski, ecc. ecc.

Nelle lezioni decima e undecima l'A. passa alle equazioni di tipo parabolico, studiando in particolare l'equazione

$$\frac{d^2 u}{d z^2} - \frac{d u}{d t} = f(z, t).$$

S'osserva che l'integrale generale si può esprimere tanto con una, che con due funzioni arbitrarie, si dimostra qualche elegante teorema di unicità, si generalizza la formola di Green, e se ne fanno alcune applicazioni col metodo delle immagini.

Si dimostra poi che un'integrale u non è in generale funzione analitica di t.

Se si introduce l'ipotesi particolare che t si possa considerare come variabile complessa $x + i + y$, l'A. con considerazioni relative a integrazioni per parti nello spazio a tre dimensioni x, y, z, che ci è qui impossibile riassumere, studia l'effetto che ha la polidromia della funzione che si presenta, quando si cerchi di generalizzare la teoria di Green, e giunge a formole che comprendono come caso particolare tutte le formole precedentemente studiate.

G. Fubini.

Digitized by Google

OSCAR VEBLEN *and* N. I. LENNES, *Introduction to infinitesimal analysis.* New-York, Wiley 1907, 8° p. VII+224.

Questo libro contiene le parti più elementari del calcolo infinitesimale, svolte con precisione e rigore. E' premesso un capitolo sui numeri reali, in cui, chi sa mai perchè, si dimostra anche la trascendenza di e e di π.

Oltre alle altre definizioni e alle prime proprietà delle derivate e degli integrali delle funzioni di una sola variabile, vi sono due paragrafi, uno dedicato alle forme indeterminate, l'altro a un troppo breve cenno della formola di Taylor. G. FUBINI.

G. H. CHANDLER, *Elements of the infinitesimal calculus*, III ed. New-York. Wiley, 1907, 8°, p. VI+319.

Come dice l'autore, questo libro è dedicato specialmente ai principianti, che vogliono dedicarsi a studi di ingegneria e di scienze applicate.

Le dimostrazioni sono spesso soltanto accennate: il rigore cede purtroppo il campo alla intuizione geometrica e a sommarii procedimenti analitici.

E' notevole la grande abbondanza di esempii e di esercizii illustrativi. G. FUBINI.

PROGRAMMI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARI

Programma delle lezioni di *Analisi Superiore* tenute all' *Università di Pavia* nell'anno scolastico 1906-07 dal prof. ERNESTO PASCAL (*).

Sulla teoria delle funzioni ellittiche, della loro trasformazione, e applicazione alla risoluzione dell'equazione di 5° grado.

PARTE I. - *Funzioni ellittiche.*

1. Le serie ϑ ellittiche. Formole fondamentali. Introduzione del concetto di *caratteristica*. Formola di *Jacobi* e sue conseguenze. Le ϑ

(*) Questo fu l'ultimo dei sedici corsi di Analisi Superiore da me tenuto all'Università di Pavia dal 1891 al 1907, essendo di poi stato trasferito all'Università di Napoli.

Colgo pertanto questa occasione per inserire qui l'elenco completo degli argomenti di tutti i sedici corsi, dedicandolo ai miei antichi scolari, che mi videro all'opera giorno per giorno, e ai quali vada per questo mezzo il mio saluto.

1) 1891-92. — "Teoria delle sostituzioni e applicazione allo studio delle configurazioni„.

2) 1892-93. — "Fondamenti analitici e geometrici per la teoria degli integrali e delle funzioni abeliane„.

Digitized by Google

per la somma di due argomenti. Relazioni algebriche fra le ϑ. Relazioni algebriche fra le ϑ pari e la derivata della ϑ dispari per argomento zero. Equazioni differenziali per le ϑ. Equazione a tre termini. Derivate dei rapporti delle ϑ e derivate logaritmiche. Derivate delle ϑ per argomento zero. Punti-zero delle funzioni ϑ. Sviluppo delle ϑ in prodotti infiniti ad un solo indice.

2. Gli integrali ellittici. Riduzione a forma normale. Le tre specie di integrali. L'equazione differenziale ellittica. Teorema di addizione per gli integrali di 1ª specie. Integrali completi di ***Legendre***.

3. Le funzioni di ***Jacobi***. Loro definizione mediante le ϑ. Introduzione dalla funzione amplitudine e dei moduli k, k'. Teorema d'addizione dedotto delle formole per le ϑ. Formole di duplicazione e moltiplicazione. Periodicità. Zeri e infiniti. Formole varie per accrescimento all'argomento di semi-periodi o quarti di periodi. Degenerazione delle funzioni di ***Jacobi***.

4. Espressione degli integrali ellittici mediante la funzione amplitudine. Andamento e forma delle curve $y = \Delta\,\varphi$, $y = \frac{1}{\Delta\,\varphi}$ le cui aree rappresentano gli integrali $F(\varphi)$ ed $E(\varphi)$ di 1ª e 2ª specie. Altre forme e verifiche del teorema d'addizione per gl'integrali di 1ª specie. I due cerchi di ***Jacobi***. Cenno sui poligoni di ***Poncelet***. La formola della trasformazione di ***Landen***. I teoremi d'addizione per gli integrali di 2ª e 3ª specie. L'arco di ellisse espresso come integrale di 2ª specie. Teorema di ***Fagnano*** sulla differenza di due archi di ellisse. La lemniscata come curva il cui arco è espresso da un integrale ellittico di

---

3) 1893-94. — " Superficie di Riemann. Integrali abeliani ,,.
4) 1894-95. — " Funzioni ellittiche e funzioni iperellitiche ,,.
5) 1895-96. — " Funzioni ellittiche e teoria della loro trasformazione ,,.
6) 1896-97. — " Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite ,,.
7) 1897-98. — " Teoria delle forme algebriche ,,.
8) 1898-99. — " Funzioni di variabile complessa - Superficie di Riemann e integrali abelian - Funzioni ellittiche e applicazione alla teoria della cubica piana, della biquadratica storta di prima specie e dei poligoni di Poncelet ,,.
9) 1899-900. — " Le forme differenziali di primo e secondo ordine - Problema di Plaff - Equazioni a derivate parziali di primo ordine ,, (cfr. *Bollettino*, T. V, pag. 26).
10) 1900-01. — " Teoria dei gruppi di trasformazioni ,,.
11) 1901-02. — " Equazioni ai differenziali totali di primo e secondo ordine ,, (cfr. *Bollettino*, T. V, pag. 90).
12) 1902-03. — " Gruppi di trasformazioni ,,.
13) 1903-04. — " Forme differenziali di ordine superiore - Trasformazioni di contatto ,, (cfr. *Bollettino*, T. VII, pag. 97).
14) 1904-05. — " Equazioni a derivate parziali di primo e di secondo ordine ,, (cfr. *Bollettino*, T. VII, pag. 90).
15) 1905-06. — Forme differenziali di ordine qualunque e in particolare quelle di secondo ordine ,,.
16) 1906-07. — " Funzioni ellittiche, loro trasformazione, e applicazione alla risoluzione della equazione di quinto grado ,,.

Digitized by Google

1ª specie. Costruzione di *Fagnano* per bisecare il quadrante della lemniscata.

5. La funzione p di *Weierstrass* come funzione inversa dell'integrale ellittico sotto la forma di *Weierstrass*. Sue proprietà. Espressione delle sue derivate. Sua omogeneità e parità. Primo termine del suo sviluppo in serie. Sua relazione con *sn*, *cn*, *dn*. Sua biperiodicità. Relazioni fra i suoi periodi e quelli delle funzioni di *Jacobi*. Verifica diretta del teorema d'addizione, e forme varie di questo. Sviluppo in serie della p e formole di ricorrenza fra i coefficienti dello sviluppo. Infiniti della funzione p e sua degenerazione. Formole varie.

PARTE II. - *Trasformazione delle funzioni ellittiche.*

6. Problema generale della trasformazione delle funzioni ellittiche. Relazioni lineari fra i moduli trascendenti. Ordine della trasformazione e teorema relativo. Composizione di due trasformazioni. Riduzione a trasformazioni elementari. Trasformazioni di 1° ordine. Il problema della moltiplicazione come caso particolare di quello della trasformazione. Soluzione algebrica di *Jacobi* del problema della trasformazione, e applicazione alle funzioni ellittiche Jacobiane. Equazione modulare. Sua costruzione per mezzo di eliminazioni algebriche. Casi degli ordini 3 e 5 e varie forme dell'equazione modulare per questi casi. Forme irrazionali. Espressioni del moltiplicatore.

7. Soluzione trascendente del problema della trasformazione. La trasformazione delle ϑ. Le formole per la funzione *sn*. Espressione del modulo trasformato e del moltiplicatore. Equazione algebrica cui soddisfa tale modulo trasformato, ed equazioni per il moltiplicatore e per il prodotto di questo per le potenze del rapporto dei due moduli. Equazione per la divisione dei periodi. Proprietà dell'equazione modulare. Costruzione di essa pei casi degli ordini 3, 5, 7, servendosi solo delle indicate proprietà. Metodo per la costruzione nei casi seguenti. Equazione differenziale di 3° ordine per il modulo trasformato. Espressione del moltiplicatore per mezzo della derivata del modulo nuovo rispetto all'antico. Equazione differenziale di 4° ordine cui soddisfa il moltiplicatore.

PARTE III. - *La risoluzione dell'equazione di 5° grado.*

8. La trasformazione di *Tchirnhaus*. Forma di *Bring-Jerrard* dell'equazione di 5° grado. Teorema di *Galois-Betti* sull'abbassamento dell'equazione modulare per gli ordini 5, 7, 11. Risolvente di *Hermite* dell'equazione modulare di 6° grado. Soluzione di *Hermite* dell'equazione generale di 5° grado.

9. Proprietà dell'equazione del moltiplicatore e di altre analoghe. Equazioni Jacobiane. Costruzione fatta da *Brioschi* dell'equazione generale Jacobiana di 6° grado. Per $B = o$ si ha l'equazione del moltiplicatore, di cui la risolvente di 5° grado trovata da *Brioschi* è dalle forma di *Bring-Jerrard*. Di qui risulta altro metodo analogo a quello di

Digitized by Google

Hermite per la risoluzione dell'equazione di 5° grado. Metodo di *Kronecker* consistente nel cercare una risolvente Jacobiana di 6° grado. Si giunge alla equazione Jacobiana corrispondente al caso di $A = o$, cioè ad un'altra delle equazioni calcolate da *Jacobi* insieme a quella del moltiplicatore. Risolventi di *Malfatti* e di *Cayley*, e loro relazioni con quella di *Kronecker* e colle equazioni Jacobiane.

II.

Programma delle lezioni di *Analisi superiore* tenute all'Università di Genova nell'anno scolastico 1906-07 dal prof. GUIDO FUBINI: *Equazioni integrali e Problemi al contorno.*

Fonti principali: Le memorie di HILBERT (Gött. Nachr. 1904) di FREDHOLM (*Acta Mathem.* tomo 27) e la *Dissertation* di E. SCHMIDT.

Preliminari sulle equazioni differenziali ordinarie. Considerazioni generali sul problema di Cauchy e teorema di esistenza di Cauchy-Lipschitz.

Il problema delle corde vibranti; gli sviluppi in serie di Fourier.

I più generali problemi al contorno per le equazioni alle derivate ordinarie del secondo ordine.

La funzione di Green per queste equazioni, e le relative formole integrali.

Le equazioni integrali di Fredholm. Risoluzione di esse col metodo di Hilbert-Fredholm.

Applicazioni di queste equazioni ai problemi al contorno posti più sopra (cfr. le cit. mem. di Hilbert).

Il metodo di Schmidt; sviluppi in serie generali. Confronto con le serie di Fourier.

Applicazioni a varii problemi della fisica matematica.

Le equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine in due variabili indipendenti.

Riduzione a forma canonica.

Le equazioni di tipo iperbolico: teoremi fondamentali di esistenza dedotti col metodo delle approssimazioni successive.

Il metodo di Riemann-Darboux e la funzione di Riemann. Le equazioni integrali di Volterra. Applicazioni alle equazioni di tipo iperbolico.

Le equazioni di tipo ellittico. I problemi al contorno.

Risoluzione del problema di Dirichlet col metodo di Fredholm.

I più generali problemi al contorno, e relative soluzioni eccezionali studiati col metodo delle equazioni integrali; sviluppi in serie.

Applicazioni ad esempii e problemi particolari suggeriti dall'analisi e dalla fisica matematica.

Digitized by Google

Brevi cenni sulla vita e sulle opere
FRANCESCO SIACCI

per ROBERTO MARCOLONGO.

Un altro grave lutto, un'altra perdita dolorosa, dopo quella recente dell'illustre Cesàro, ha colpito la scienza. Con la morte di Francesco Siacci, avvenuta il 31 maggio dello scorso anno, scompare non solamente il professore insigne che illustrò le cattedre di Torino e di Napoli; il balistico sapiente e di fama mondiale; ma scompare lo scienziato coetaneo dei Battaglini, Beltrami, Betti, Brioschi, Cremona, che altamente onorò l'Italia nel campo delle matematiche pure ed applicate.

Angelo Francesco Siacci era nato in Roma (20 aprile 1839) da Matteo, di nascita corso e vecchio soldato del primo impero, e da Beatrice Badaloni. All'animo virile della madre, egli, perduto il padre in tenera età, dovè l'avviamento agli studii, che compì brillantemente nella antica e gloriosa Sapienza, sotto la guida di Tortolini, Pieri, Volpicelli. E diè subito prove del suo ingegno e della eccezionale disposizione agli studii matematici, pubblicando, ancora studente, nel Giornale Arcadico, due lavori eleganti — uno è lo studio mirabilmente condotto di una curva di quarto ordine — ed ottenendo a pieni voti la prima laurea *ad honorem* in matematica nel luglio 1860 (1).

Restò ancora un anno in Roma, protetto sempre dal principe Baldassare Boncompagni, l'eruditissimo storico delle matematiche, l'illuminato mecenate dei matematici, di cui fu pure segretario; ma agli ultimi del 1861 e forse in seguito ai gravi disordini avvenuti nella Università romana, egli emigrò a Torino. Fu ammesso, tenuto conto degli studii e delle pubblicazioni già fatte, sottotenente in quella Scuola di Applicazione di artiglieria e genio, di cui doveva essere

(1) Dai registri dell'Università di Roma, da me consultati, si ricava che il Siacci prolita in filosofia, con rescritto del 14 dic. 1857 ritirò la pagella del 2° anno in Filos. e Matem. Riportò il grado di Baccelliere sotto il dì 15 giugno 1858 a pienezza di voti. Ottenne il licenziato a dì 9 giugno 1859 a unanimità di suffragi. A pieni voti ugualmente fu approvato per la prima laurea *ad honorem* sotto il dì 3 luglio 1860.

L'Università romana, riordinata da Leone XII, dava ai due studenti che per concorso avevano mostrato merito singolare e superato tutti gli altri, le prime due lauree *ad honorem*; agli altri due studenti, che dopo i primi si erano più distinti, le altre due lauree *ad praemium*. Il concorso poi consisteva in una prova orale sostenuta innanzi a cinque professori: superata questa si dava un esame scritto (dissertazione latina) sopra un tema scelto a sorte da cinquanta temi.

(Collectio legum et ordinationum de necta studiorum ratione etc. Romae 1841).

Per molte e interessanti notizie sulla Università romana, si può consultare l'opera di R. DE CESARE: « Roma e lo Stato del Papa », Roma 1907; vol. I, vol. II, pp. 20, 27.

Digitized by Google

uno dei più dotti professori. Infatti poco dopo la guerra del 1866, a cui prese parte, egli fu comandato quale professore aggiunto di Balistica: nominato titolare nel 1872, egli ebbe questo insegnamento, in cui doveva lasciare così profonde tracce, fino al 1892. Nel tempo stesso dalla Facoltà di Scienze di Torino egli era incaricato (gennaio 1871) dell'insegnamento della Meccanica Superiore; insegnamento che tenne, come straordinario sino al 1875 e come ordinario dal 1889, fino al giorno in cui abbandonò Torino.

Questa nuova occupazione forse lo sconsigliò di accettare nel 1871 l'invito del Brioschi, che lo avrebbe voluto in Roma a sostituire il Chelini, ritiratosi dall'insegnamento. Ma nel 1892, nominato senatore, dopo aver rappresentato alla Camera elettiva nella XVI e XVII legislatura il primo collegio di Roma, egli desiderò riavvicinarsi stabilmente alla patria e sentì forse il bisogno di un clima più mite alla sua salute già minata. Accettò l'offerta della Facoltà di Scienze di Napoli, che con voto solenne lo volle successore del Padelletti nella cattedra di Meccanica Razionale. Abbandonò quindi Torino, dopo una dimora di circa trenta anni, e si ridusse in Napoli colla famiglia. Già alla fine del 1892 aveva abbandonato la milizia attiva; nella riserva, pochi mesi prima di morire, aveva raggiunto il grado di maggior generale. In Napoli, per malattia cardiaca, finì i suoi giorni.

Le pubblicazioni del Siacci, nei quaranta e più anni di vita scientifica, sono più di cento; e fatta eccezione dei primi lavori che risentono evidentemente la scuola dei suoi maestri di Roma, e riguardano questioni di geometria analitica, la teoria delle forme e quella dei determinanti, egli ben presto dedicò quasi ogni sua attività allo studio delle alte questioni di Meccanica analitica e di Balistica, in cui si affermò con lavori originali e poderosi.

E' dovuta al Siacci una elegante decomposizione della forza che sollecita un mobile secondo la tangente alla traiettoria e secondo una retta diretta dal mobile al punto fisso e di cui egli ingegnosamente si valse per dare le condizioni affinchè due forze passanti per due punti fissi facciano descrivere ad un mobile (nel vuoto o in un mezzo resistente come il quadrato della velocità) la stessa traettoria: e per trovare nuove proprietà delle forze centrali; e pure al Siacci è dovuta lo considerazione del problema del pendolo di Foucault in un mezzo resistente; ecc. Ma i lavori di Meccanica che assodarono la sua fama di analista provetto e di investigatore acuto ed originale sono quelli sulla rotazione dei corpi liberi e quelli sulla teoria delle equazioni canoniche del moto.

Il Chelini, poco dopo la pubblicazione delle classiche ricerche del Poinsot sul problema della rotazione di un corpo sospeso per un suo punto fisso e non soggetto a forze, aveva dedotte tutte le conseguenze analitiche della teoria sviluppando in modo profondo la parte algebrica dei concetti di Poinsot. Il Siacci riprende gli studi del Poinsot

Digitized by Google

e del Chelini da un altro punto di vista e in due pregevolissime memorie studia con vari metodi e con un sapiente impiego delle funzioni ellittiche, il moto degli assi della così detta sezione invariabile, cioè della ellissi (di area costante) sezione dell'elissoide centrale con il piano diametrale parallelo al piano invariabile; ne mostra le oscillazioni intorno ad un retta che gira equabilmente nel senso del moto dell'elissoide e ricava le formule date da Jacobi (senza dimostrazione) per la determinazione, mediante funzioni teta jacobiane, dei nove coseni direttori degli assi centrali rispetto ad una speciale terna fissa.

Il lavoro, che meritò i caldi elogi del Beltrami nella commemorazione del Chelini, contiene numerosi ed eleganti risultati che ebbero l'onore di figurare nel libro che il grande Hermite scrisse « *Sur quelques applications de la théorie des Fonctions elliptiques* »; e merita di esser notato che esso è anteriore alla pubblicazione dei « *Fragments sur la rotation* » nelle opere complete di Jacobi.

E continuando ancora i suoi studi su questo inesauribile argomento, in cui ha spaziato sovrano il genio di Poinsot e di Sylvester, il Siacci riesce a trovare un nuovo ed elegante teorema cui resta ormai legato il suo nome: egli dimostrò che quando un corpo non animato da forze gira intorno ad un punto fisso, un iperboloide, da lui chiamato centrale, legato al corpo e avente per assi gli assi centrali di inerzia, ruzzola senza strisciare sopra un cilindro circolare retto il cui asse passa pel punto fisso ed è parallelo all'asse della coppia d'impulso; teorema che, anche dopo le eleganti generalizzazioni del Gebbia, egli riuscì ad estendere in un certo senso.

Notiamo ancora la dimostrazione, da annoverarsi tra le più semplici e spedite, per la ricerca dell'equazione differenziale dell'erpoloide.

Nè a questi soli si arrestano i contributi del Siacci; egli osserva che la risoluzione del problema della rotazione, quando si voglia far uso del metodo della funzione caratteristica secondo Jacobi, conduce alla risoluzione di una equazione di quarto grado. Volendo evitare questa risoluzione egli generalizza il procedimento di Jacobi; trova infinite funzioni caratteristiche, mai prima di lui assegnate, aventi forma analoga alla funzione caratteristica del moto di un punto attratto da un centro fisso e che svelano nuove proprietà del moto alla Poinsot. Con questa ricerca, primo dei suoi lavori accolti nelle Memorie della R. Accademia di Scienze di Napoli che lo aveva eletto socio, il Siacci proseguendo gli studi di Poisson, che aveva notato l'analogia tra il moto perturbato della rotazione e quello, pure perturbato del moto centrale; quelli di Jacobi, che aveva compreso i due problemi non perturbati in uno stesso procedimento analitico; è riuscito a trasformare completamente l'un problema nell'altro.

Altro lavoro originale è quello dedicato allo studio dei quattro

Digitized by Google

assi (detti statici) intorno ai quali deve girare, intorno a un punto fisso, un corpo rigido ai cui punti sono applicate forze costanti in direzione ed in intensità, per passare da una posizione qualunque ad una delle quattro posizioni d'equilibrio. Quantunque anche il Somoff, prima del Siacci, si fosse occupato dell'argomento, l'eleganza e la novitá dei risultati conseguiti dal Siacci è invero sorprendente; sì da far ritenere anche questo uno dei più eleganti lavori da lui scritti.

Conoscitore profondo delle teorie di Hamilton-Jacobi, tema favorito delle sue lezioni di Meccanica Superiore a Torino e a Napoli, numerosi ed importanti suoi lavori riguardano questo argomento; la trasformazione delle equazioni canoniche del problema dei tre corpi, la generalizzazione di risultati ben noti di Jacobi, Bour, Brioschi; ogni sua memoria contiene una osservazione nuova ed acuta, qualche teorema o risultato elegante.

Ma sopratutto è notevolissima la memoria in cui espone il Teorema Fondamentale nella teoria delle equazioni canoniche del moto. In essa il Siacci dá un teorema molto più generale di quello classico di Jacobi e da cui fa scaturire tutta la teorica: in essa il Siacci è forse il primo, certamente dei primi, a considerare il famoso covariante bilineare, ch'egli chiama *forma fondamentale*, e di cui le ulteriori ricerche hanno mostrato tutta l'importanza. Il Siacci ne trae gran partito per la ricerca della piú generale trasformazione di un sistema canonico in un altro, per quella delle equazioni del moto perturbato e della funzione caratteristica. Questi risultati, conseguiti senza conoscere i precedenti lavori del Lie, acquistano oggidì forma più parlante colla introduzione dei concetti di gruppi di trasformazioni infinitesime di contatto, non ancora sviluppati al tempo in cui la memoria fu scritta; ma ciò nulla toglie alla sostanza fondamentale dei risultati stessi; onde ben a ragione il Whittaker, nella sua recente *Analytical Dynamics*, annovera il Siacci tra coloro che maggiormente contribuirono ai progressi di questo ramo della Meccanica e fa, nel detto trattato, largo posto ai risultati del Siacci (1).

Il Siacci fu tra i matematici italiani uno dei pochi che, come il Brioschi, dedicasse le profonde conoscenze di analisi e la mente eletta allo studio di questioni non strettamente teoriche; gli studi di cui già dicemmo furon condotti di pari passo cogli studi di Balistica e, abbandonati questi, egli passò a discutere le osservazioni fatte da James Glaisher in numerose ascensioni aereostatiche circa le perdite di temperatura e i gradi di umidità e fu condotto ad una nuova formula altimetrica; la prima — son parole dello stesso Siacci — che senza essere empirica, sia fondata sopra una legge sperimentale. Il Siacci stesso mostrò la grande esattezza della sua formula per la de-

(1) E. T. Whittaker: « A Treatise on the Analythical Dynamics of Particles and Rigid Bodies », Cambridge 1904, p. V.

Digitized by Google

terminazione dell'altezza del Monviso; essa fu applicata subito all'Etna e poscia, dagli audaci esploratori del S. Elia, a coronare quasi una vittoria italiana col lavoro del matematico italiano.

Nella Balistica il Siacci, dopo la morte del Saint-Robert, era una autorità di primissimo ordine; e questa scienza è a lui debitrice di grandissimi e riconosciuti progressi. La sua opera è già stata analizzata da altri di me ben più competente (1); mi basterà rammentare che oltre a numerose note di balistica pratica e teorica, alla discussione delle leggi sulla resistenza dell'aria sui proietti, il Siacci deve il suo nome e la sua incontrastata riputazione al trattato di Balistica ed alle famose tavole di tiro.

Il trattato di Balistica teorico-pratica, pubblicato in due volumi nel 1870, a cui se ne aggiunse un terzo nel 1885, completamente rifuso e pubblicato in un sol volume nel 1888 fu tradotto quasi subito in francese. È secondo il comune, universale consenso dei tecnici, un'opera magistrale, pieni di risultati nuovi ed utili, in cui la scienza balistica — scienza italiana nelle sue origini — non è più una scienza di lusso, riservata ai teorici, ma è resa pratica *atta cioè a risolvere le questioni del tiro con prontezza e facilità, con maggiore esattezza, con economia di tempo e di danaro.*

Il Siacci infatti nella risoluzione dei problemi di balistica non solo ha portato le sue profonde conoscenze di analisi e la rara maestria di analista provetto; ma ha cercato per di più di rendere facili, pronte, immediate, quasi, le questioni che alla pratica del tiro si riferiscono.

Le tavole di tiro presentano il sistema più pratico e più sicuro per risolvere *a priori* i diversi problemi sugli elementi del tiro. Pubblicate nel 1880 furono presto tradotte in quasi tutte le lingue ed ebbero una diffusione enorme in Europa ed in America; nessuna altra soluzione si è ancora trovata che possa sostituire quella, quasi perfetta, del Siacci.

Il maggiore Giuliano Ricci a proposito dei lavori balistici del Siacci dice:

« Come le equazioni differenziali del movimento del proietto si « stabiliscono lasciando alla resistenza la sua forma generale F (*v*), « la stessa indeterminazione viene conservata col metodo Siacci anche « nelle formule e nei procedimenti d'integrazione. Esso fa astrazione « infatti da ogni ipotesi speciale sulla resistenza dell'aria ».

Ed il comandante Charbonnier nel suo recente trattato di Balistica, in cui dedica vari capitoli alla minuta esposizione di tutti i metodi del Siacci, dice:

« Le problème devrait être résolu en lui-même par des pro-

(1) Francesco Siacci. Commemorazione del maggiore Giuliano Ricci. Giornale d'Artiglieria e genio. Annata XXIV, v. II, pp. 335-367, giugno 1907.

Digitized by Google

« cédés généraux et non à l'aide des artifices analytiques que peut « permettre le choix d'une forme explicite de la fonction F (*v*)..... « On peut dire que cette manière d'envisager d'ensemble le problème « balistique, jointe à la solution approchée qui a pu être donnée « dans certains cas spéciaux constitue un des progrès les plus con- « sidérables qui aient été faits en Balistique Extérieure. Le mérite « en revient pour la plus grande partie a deux savants artilleurs « italiens, le colonel de Saint-Robert et le colonel Siacci. À l'heure « actuelle, il est possible d'élargir la même idée de manière à lui « faire embrasser la Balistique Extérieure tout entière » (1).

Dopo la sua partenza da Torino, ebbe ancora il Siacci occasione di occuparsi di Balistica: una questione relativa alla velocità minima nel moto dei proietti, gli offrí occasione di recare un nuovo e geniale contributo a quella scienza in cui aveva già raccolto tanti allori.

Il d'Alembert aveva assegnato quattro forme speciali di resistenza per le quali il problema balistico è riducibile alle quadrature. Siacci ne trova altre numerosissime più o meno complicate, trattando con raro accorgimento analitico alcune equazioni differenziali; torna a discutere il teorema della velocità minima; mostra la portata pratica di così astratte investigazioni e nuovi ed eleganti risultati sono conseguiti nella Meccanica.

Le lezioni litografate di Meccanica Razionale del Siacci, riassunto delle lezioni impartite prima a Torino, quando, ritiratosi il professore Erba, egli ebbe l'incarico dell'insegnamento, e poi a Napoli, meritano un posto onorevole nella produzione del Siacci.

Partigiano convinto del sistemo classico, acuto, vivace nel discutere sui principî fondamentali della Scienza cui aveva dedicato tutto l'ingegno; in queste lezioni egli si rivela, come sempre, espositore elegante, perfetto, logico. Ma non volle maí pubblicarle: per quanto non mancassero sollecitazioni ed insistenze di amici e discepoli. « Sono troppo vecchio per fare un libro », diceva. E dei suoi studi sui principî fondamentali non pubblicò che due note succose, acute, negli Atti dell'Accademia di Napoli.

Il Siacci amò profondamente la patria, l'esercito; e rifiutò offerte seducenti dall'estero per restare al suo posto. Educato negli studi classici, aveva serbato il culto per le buone lettere e per gli studi filosofici. Scriveva, esempio raro nei cultori di scienze esatte, con eleganza e con vigoria. Le commemorazioni frequenti fatte alle Accademie di Torinò e di Napoli furono apprezzatè anche letterariamente; sopratutto quella del Genocchi, cui era legato da salda amicizia; e teneva moltissimo agli elogi che ne aveva fatto il De Amicis.

---

(1) « Balistique Extérieure rationnelle (problème balistique principal) » par le Comm. P. CHARBONNIER, Paris, Doin 1907; pp. 13-14.

Digitized by Google

Era socio nazionale delle Accademie dei Lincei (1890), di Torino (1876) e di Napoli (1893); uno dei XL e corrispondente dell' Istituto Lombardo e di Bologna.

Non gli mancò dunque la considerazione dei contemporanei; nè potrà venir meno quella dei posteri, perchè le sue opere, i suoi lavori originali gli assicurano un posto onorevole nella Storia della Scienza.

Pubblicazioni di Francesco Siacci.

Giornale Arcadico.

1. Intorno a tre problemi proposti nella raccolta intitolata « Nouvelles Annales de mathématiques » e pubblicate dai sigg. Terquem e Gérono (t. CLXIV, pp. 166-185, 1859).
2. Intorno ad una linea di quart'ordine (t. CLXVII, pp. 181-201, 1860).

Annali di Matematica pura ed applicata.

3. Intorno ad una formola sommatoria delle potenze intere de' numeri naturali (t. IV, pp. 46-49, 1861).
4. Sull'uso dei determinanti per rappresentare la somma delle potenze intere dei numeri naturali (t. VII, pp. 19-24, 1865).
5. Degli invarianti e covarianti delle forme binarie ed in particolare di quelle di 3° e 4° grado (t. VII, pp. 73-104, 1865).
6. Intorno ad alcune trasformazioni di determinanti (s. II, t. V, pp. 296-304, 1871-73).

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matem. e fisiche.

7. Sul teorema del conte di Fagnano (t. III, pp. 1-26, 1870).
8. Sopra una memoria di Gilbert (t. XI, p. 217, 1878).

Giornale di Matematiche.

9. Intorno ad una serie e ad una funzione dei coefficienti binomiali (v. X, pp. 349-359, 1872).
10. Questione 10 e soluzione (v. X, p. 360, 1872; v. XII, pp. 75-78, 1874).
11. Questioni 1, 2, 3, 4, 5 e soluzioni (v. X, p. 188, 239-240, 279-293, 307-312, 1872).
12. Questioni 23, 24, 25, 26, 27, 28 (v. XI, pp. 121-122, 191-196, 1873, v. XII, pp. 78-79, 1874).

Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences de Paris.

13. Sur un théorème de Mècanique céleste (t. LXXVII, pp. 1288-1291, 1873).
14. Sur le problème des trois corps (t. LXXVIII, pp. 110-113, 1874).
15. Un théorème de Dynamique (t. LXXXVIII, pp. 909-912, 1879).
16. Sur une proposition de Mécanique (t. CXXIII, pp. 395-396, 1896).
17. Sur un problème de d'Alembert (t. CXXXII; pp. 1175-1178; t. CXXXIII, pp. 381-382, 1901).

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.

18. Intorno ad alcune trasformazioni delle equazioni differenziali del problema dei tre corpi (v. VI, pp. 440-454, 1871).
19. Intorno ad una trasformazione simultanea di due forme quadratiche ed alla conica rispetto a cui due coniche date sono polari reciproche (v. VII, pp. 758-771, 1872).
20. Teorema sui determinanti ad alcune sue applicazioni (v. VII. pp. 772-783, 1872).
21. Un nuovo metodo per determinare la resistenza dell'aria sui proietti (v. XIII, pp. 131. 134, 1877).
22. Il pendolo di Leone Foucault e la resistenza dell'aria (v. XIII, pp. 695-715, 1878).
23. Il pendolo di Leone Foucault. Poche parole di risposta al conte St. Robert (v. XIII, pp. 211-216, 1878).

Digitized by Google

24. Relazione intorno ad una memoria del sig. E. Sang intitolata « Nouveau calcul des mouvements elliptiques » (v. XIV, pp. 464-467, 1879).
25. Del moto per una linea piana (v. XIV, pp. 750-760, 1879).
26. Del moto per una linea gobba (v. XIV, pp. 946-951, 1879).
27. Nota intorno ad una legge di reciprocità dinamica (v. XV, pp. 519-520, 1889).
28. Un teorema di Meccanica analitica (v. XV, pag. 809, 1880).
29. Gli assi statici di un sistema di forma invariabile (v. XVII, pp. 241-242, 1880).
30. Alcuni teoremi sulla resistenza incontrata da una superficie in moto dentro un fluido (v. XIX, pp. 541-543, 1884).
31. Sulla rotazione di un corpo attorno ad un punto (v. XXI, pp. 261-265, 1886).
32. Alessandro Dorna. Commemorazione (v. XXII, pp. 247-249, 1886).
33. Sulla compensazione delle poligonali nei rilievi topografici (v. XXIII, pp. 430-432 (1888).
34. In commemorazione di Enrico Narducci (v. XXVIII, p. 811, 1893).

Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino.

35. Un nuovo metodo per determinare la resistenza dell'aria sui proietti (s. II, t. XXXI, pp. 137-158, 201-245, 1879).
36. Giovanni Cavalli. Commemorazione. (s. II, t. XXXVIII, pp. 67-79, 1886).
37. Cenni necrologici di Angelo Genocchi, letti il giorno trigesimo della sua morte (s. II t. XXXIX, pp. 463-495, 1889).

Atti e Rendiconti della R. Accademia dei Lincei.

38. Nota intorno alle forme quadratiche (t. XXV, pp. 339-341, 1871-72).
39. Sopra una proposizione di Jacobi (s. III, v. IV, pp. 236-240, 1879-80).
40. Sugli angoli di massima gittata (s. IV, v. III, 2° sem. pp. 211-216, 1887).
41. Paolo Ballada di St. Robert (s. IV, v. V, 1° sem. pp. 243-247, 1889).
42. Sulle forze atte a produrre spostamenti eguali (s. IV, v. V, 1° sem. pp. 626-630, 856-880, 1889).
43. Sulle tensioni di un sistema elastico articolato. (s. V, v. III, 2° sem. pp. 205-214, 245-255, 1894).
44. Sulla stabilità dell'equilibrio, e sopra una proposizione di Lagrange (s. V, v. V, 2° sem. pp. 121-122, 1896).

Memorie della R. Accademia dei Lincei.

45. Teorema fondamentale nella teoria delle equazioni canoniche (s. III, v. XII, pp. 423-436, 1881-82).

Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL).

46. Della rotazione dei corpi liberi (s. III, t. III, mem. n. 1, di pp. 30, 1879).
47. Sulla rotazione dei corpi liberi (s. III, t. III, mem. n. 3, di pp. 39, 1879).
48. Le quaterne statiche nei sistemi di forma invariabile (s. III, t. IV, mem. n. 4 di pp. 16, 1882).

Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Napoli.

49. Sulla resistenza dell'aria al moto dei proietti (s. III, v. I, p. 312, 1898).
50. Sulla costituzione atmosferica quale risulta dalle osservazioni areostatiche di James Glaisher, e sopra una nuova formola barometrica per la misura delle altitudini. (Sunto dell'Autore) (s. III, v. II, p. 336, 1896).
51. Carlo Weierstrass. Parole commemorative (s. III, v. III, pp. 63-64, 1897).
52. Francesco Brioschi. Commemorazione (s. III, v. IV, pp 3-4, 1897).
53. Sulla composizione delle forze nella Statica e sui suoi postulati. Nota 1ª. (s. III, v. V, pp. 34-39, 1899).
54. Sulla composizione delle forze nella Statica e sui principii della Meccanica. Nota 2ª. (s. III, v. V, pp. 69-78, 1899).
55. Sulla integrazione di una equazione differenziale e sulla equazione di Riccati (s. III, v. VII, pp. 139-143, 1901).

Digitized by Google

Memorie della R. Accademia delle Scienze di Napoli.

56. Sulla funzione caratteristica del moto di rotazione di un corpo non sollecitato da forze (s. II, v. VI, mem. 13ª di pag. 25, 1894).
57. Sulla costituzione atmosferica quale risulta dalle osservazioni areostatiche di James Glaisher e sopra una nuova formola barometrica per la misura delle altezze (s. II, v. VIII, mem. 11ª di pag. 40, 1897).

Atti del R. Istituto d'incoraggiamento di Napoli.

58. Sopra un nuova formola barometrica per la misura delle altezze (s. IV, v. IX, mem. 13 pag. 11 (1896).

In Memoriam D. Chelini, Collectanea Mathematica.

59. L'iperboloide centrale nella rotazione dei corpi (pp. 6-16, Milano 1881).

Rivista Militare Italiana (Torino).

60. Della resistenza dell'aria sui proiettili oblunghi (s. II, v. I, pp. 281-315; v. II, pp 5-30 121-151 (1868).
61. La Clessidra elettrica (per la misurazione della velocità dei proietti oblunghi). (s. III, v. I, pp. 226-249 (1869).
62. Delle esperienze eseguite a Metz nel 1856 e 1857 sulla resistenza dell'aria contro i proietti sferici (s. III, v. IV, pp. 521-538).

Giornale d'artiglieria (Torino).

63. Della resistenza dell'aria sui proietti oblunghi (anno 1868, pp. 49-117).
64. Regole pratiche per determinare alcune circostanze del tiro (anno 1872, pp. 42-52).
65. Tavole generali pel tiro ficcante da c. 16, G R, compilate secondo il sistema prussiano. (Estratto dal vol. II del Corso di Balistica del capitano F. Siacci) (anno 1873, pp. 65-106).

Revue d'artillerie (Paris).

66. Sur les principes du tir (t. V, pp. 365-373, (1875).
67. Expériences de Balistique executées en Hollande (Extrait de la Rivista d'artiglieria e genio) traduit et résumé par le capitaine d'artillerie Chapel (t. XXIV, pp. 262-270, 1884).
68. Note sur les axes de groupements (Extrait de la Rivista d'artiglieria e genio) (t. XXIV, pp. 445-455, 1884).
69. Un procédé d'intégration des formules balistiques (t. XXVII, pp. 315-322, 1886).

Giornale d'Artiglieria e Genio - Parte I.ª

70. Sui principii pratici del tiro (anno 1874, pp. 560-585).
71. Sul calcolo delle tavole di tiro. Parte I (anno 1875, pp. 1-45).
72. Sul calcolo » » » Parte II (a. 1875, pp. 685-739).
73. Sul calcolo » » » Parte III (a. 1879, pp. 333-343).
74. Le tavole del tiro indiretto del cannone da c. 16 G R e dell'obice da c. 22 B R. precedute da una istruzione sul loro impiego e da una relazione delle esperienze (a. 1876, pp. 917-1063).
75. Rendiconto delle esperienze pel tiro di lancio dei cannoni da c. 16 G R, 12 B R e 12 G R (a. 1877, pp. 1041-1085).

Giornale d'Artiglieria e Genio - Parte II.ª
e Rivista d'Artiglieria e Genio.

76. Balistica e pratica. Nuovo metodo per risolvere i problemi del tiro (a. 1880, pp. 376-411).
77. Alcune proposte sul puntamento e le correzioni del tiro (a. 1880), pp. 459-469).
78. Addizione al nuovo metodo per risolvere i problemi del tiro (a. 1881, pp. 1071-1090).
79. Balistica elementare (a. 1882, v. II, pp. 843-871).
80. Sugli assi delle rose di tiro (a. 1883, v. I, pp. 49-74).
81. Sulla resistenza dell'aria e sulle recenti esperienze olandesi (a. 1884, v. I, pp. 301-329).

Digitized by Google

82. Una comunicazione del generale Mayevski sugli assi delle rose di tiro (a. 1884, v. I, pp. 437-439).
83. Teoremi della resistenza obliqua (a. 1884, v. II, pp. 121-137).
84. Ancora sugli assi delle rose di tiro (a. 1884, v. IV, pp. 99-100).
85. Nota sugli assi delle rose di tiro (a. 1884, v. VI, pp. 401-405).
86. Sulle tavole di tiro delle batterie da costa (a. 1884, v. I, pp. 129-149; a. 1885, v. IV, pp. 62-77).
87. Intorno ad alcune pubblicazioni di Balistica (a. 1884, v. IV, pp. 93-98; a. 1885, v. II, pp. 130-131).
88. Sulle tavole del tiro arcato (a. 1885, v. I, pp. 322-329, 525-553).
89. Una protesta del prof. Bashforth. « Sic vos non vobis » (a. 1885, v. III, pp. 301-303).
90. Sul tiro indiretto (a. 1886, v. I, pp. 515-534).
91. Perfezionamenti vari al nuovo metodo per risolvere i problemi del tiro (a. 1886, v. III, pp. 31-45).
92. Il potenziale della resistenza (a. 1887, v. II, pp. 161-177).
93. Sugli angoli di massima gittata ed altre questioni (a. 1887, v. III, pp. 273-293).
94. Spazio battuto ed errore battuto (a. 1887, v. IV, pp. 379-385).
95. Il conte Paolo di Saint Robert (a. 1889, v. II, pp. 5-13).
96. Sulla soluzione dei problemi del tiro curvo e sull'angolo di massima gittata (a. 1889, v. III, pp. 227-241).
97. Sulla soluzione rigorosa del problema balistico (a. 1889, v. IV, pp. 335-359; a. 1890, v. IV, pp. 5-25).
98. Sulla legge della resistenza dell'aria e sui problemi del tiro curvo - Risposta al capitano Zaboudski (a. 1891, v. I, pp. 199-215).
99. Sull'angolo di rilevamento e sulla sua misura (a. 1891, v. IV, pp. 240-248).
100. Sulla resistenza dell'aria al moto dei proietti (a. 1896, v. I, pp. 5-27, 195-208, 341-352).
101. Sopra un contributo alla soluzione razionale del problema balistico. Appunti (a. 1896, v. II, pp. 5-23, a. 1897, v. I, pp. 351-358).
102. Nuova tavola Balistica generale (a. 1896, v. IV, pp. 5-44).
103. Nuova tavola della funzione B calcolata colla nuova formola di resistenza (a. 1897, v. IV, pp. 5-29).
104. I parametri complementari nella Balistica Razionale (a. 1896, v. II, pp. 429-434; a. 1898, v. I, pp. 5-23).
105. Sulla velocità minima (a. 1901, v. I, pp. 287-297; v. II, pp. 21-34).
106. La velocità minima ed alcuni articoli del sig. Colonnello N. Zaboudski (a. 1901, v. IV, pp. 23-34).
107. Alcune nuove forme di resistenza che riducono il problema balistico alle quadrature (a. 1901, v. III, pp. 5-25; v. IV, pp. 5-34, 165-189).

Pubblicazioni a parte.

— Corso di Balistica teorica-pratica. Torino 1870-1885. Tre volumi con atlante.
— Balistica. 2ª edizione, Torino 1888.
— Balistique Extérieure, traduction annotée par P. Laurent, Ingénieur, suivie d'une note sur les projectiles discoïdes par F. Chapel, Chef d'Escadron d'Artillerie, Paris 1891.
— Tiro di Guerra (Assedio e Campagna), Torino 1879.
— Il Vol. VII, tit. II delle Istruzioni pratiche d'Artiglieria. Nozioni generali sul tiro dell'artiglieria da campagna e d'assedio, Roma 1882.
— Compendio di Balistica pratica, Roma 1883.
— Lezioni di meccanica Razionale (litografate), Torino 1891, Napoli 1896.

Napoli, Febbraio 1908.

Digitized by Google

NOTIZIE.

C. G. Adolfo Mayer nacque a Lipsia il 15 Febbrajo 1839. Esaurito il corso degli studi secondari nelle scuole della sua città natale ed ottenuto il diploma di maturità, si recò all'Università di Heidelberg e quindi, per due semestri, a Gottinga, scorsi i quali ritornò da Heidelberg, ove, sotto la direzione di Otto Hesse, conseguì il 14 Dicembre 1859 la dignità dottorale. Al suo maestro si mantenne fedele anche poi, come la prova la sua permanenza ad Heidelberg dopo la laurea e la sua collaborazione alla stampa dell' « Analytische Gegometrie des Raumes » di quel grande. Nell'autunno 1862 si recò a Königsberg ove subì l'influenza di F. Neumann, visibile nel lavoro che gli valse la qualità di libero docente conferitagli dall'Università di Lipsia sullo scorcio del 1866. Col semestre estivo 1867 cominciò ad insegnare; nel 1872 fu nominato professore straordinario, nel 1881 venne promosso professore onorario e nel 1890 ordinario. In causa di una grave malattia il Mayer dovette interrompere il corso di lezioni cominciato durante il semestre invernale 1907-08; quella malattia fu la causa della deplorata sua morte, accaduta l'11 Aprile 1908. Come è noto i lavori del Mayer vertono sopra il calcolo delle variazioni, la teoria delle equazioni differenziali e la meccanica; in essi è visibile prima l'influenza di Jacobi ed Hamilton, poi quella di Lie. Nè in un giornale dell'indole del *Bollettino* va dimenticato il lavoro storico sul « principio della minima azione », pubblicato come « Antrittsvorlesung » del compianto matematico.

***

Una nuova Collezione di Manuali Scientifici venne testè intrapresa dall'infaticabile Casa editrice Teubner sotto la direzione del Prof. E. Jahnke. Porta dessa il titolo « Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studirende » ed ha per iscopo di fornire agli ingegneri nozioni intorno agli ultimi risultati della ricerca scientifica, evitando lunghi sviluppi e calcoli complicati. Ogni volume sarà quindi soltanto di un centinaio di pagine. I tre finora pubblicati mostrano la serietà dell'impresa e l'impegno spiegato per raggiungere anche una notevole eleganza d'aspetto; ecconi i titoli:

R. Gans, *Einführung in die Theorie des Magnetismus*. Mit 40 Textfiguren [Prezzo Mk. 2,40].

K. W. Wagner, *Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln*. Mit 23 Textfiguren [Prezzo Mk. 2.40].

C. Schaefer, *Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und del Magnetismus*. Mit einem Bildniss J. C. Maxwell und 32 Textfiguren [Prezzo Mk. 340].

Digitized by Google

***

CHE COSA É LA MATEMATICA? Tale è la fondamentale questione trattata dal Prof. M. Simon nel recente suo scritto *Ueber Mathematik* (Philosophischen Arbeiten; II Band, I Heft, 1908). La risposta da da lui data è conforme a quella proposta dal Grass mann (« die Mathematik ist die Wissenschaft der freien Verknüpfung und Trennung »); ma per giustificarla ed illustrarla egli ha tratti dalla sua ineasuribile erudizione una folla di argomenti didattici, filosofici e storici. Per ciò la lettura di questa nuova pubblicazione del fecondo professore del Liceo di Strassburgo riuscirà utile a tutti gli insegnanti, e specialmente a quelli delle scuole secondarie; ma anche i cultori della storia delle scienze esatte vi apprenderanno qualche nuovo dato: tale è ad es. la notizia che la « legge di permanenza delle leggi formali » di consueto attribuita ad H. Hankel venne per la prima volta enunciata da G. H. Bubendey nella memoria *Ueber die räumliche Darstellung der imaginären Grössen der Analysis* (Programm des Johanneums zu Hamburg, 1834).

***

MONUMENTO AD ABEL. — G. Vigeland, il più eminente degli scultori viventi norvegesi ha compiuto un modello in gesso di uno splendido monumento ad Abel, dell'altezza di 13 metri. Onde ricavarne un monumento in bronzo è aperta fra i matematici di tutto il mondo una sottoscrizione; le offerte sono raccolte a Cristiania da una commissione composta da W. C. Brogger, E. Holst, F. Nansen, C. Stromer, L. Sylow e A. Thue.

***

RIVISTA DI SCIENZA. — Il primo fascicolo di questo nuovo « organo di sintesi scientifica » contiene due articoli direttamente interessanti i nostri lettori (E. Picard, *La mécanique classique et ses approximations successives;* J. Tannery, *Questions pedagogiques: L'enseignement secondaire*), nonchè analisi critiche di opere recenti di Picard, Poincaré e Duhem; se i fascicoli seguenti saranno di altezza non inferiore a quella raggiunta dall'attuale, alla nuova rivista non può mancare quel completo successo che noi gli auguriamo.

***

PER LA STORIA DELLA GEOMETRIA INTRINSECA. — L'uso delle coordinate intrinseche per lo studio d'una curva piana sembra risalire ad Eulero; ma chi fece di esse la prima applicazione sistematica è il ben noto matematico e storico inglese William Whewell (1794-1866). I suoi lavori sopra tale argomento essendo stati inseriti in una raccolta (le « Transactions of the Cambrigde philosophical Society »; vol. VIII e IX, 1849-51), che, almeno una volta, era poco diffusa, ebbero sin ora

Digitized by Google

scarsissima notorietà. A farle conoscere in Germania ha pensato ora il prof. A. Walter che le ha testè pubblicate tradotte in tedesco nel «Jahresbericht 1907 der K. K. I. Staats-Realschule in Graz» sotto il titolo: *William Whewell Abhandlungen zur natürlichen Geometrie der Kurven*.

***

Un lavoro fondamentale nella teoria delle equazioni di 5° grado è quello di S. Bring, pubblicato a Lund 1786 sotto il titolo: *Meletemata quaedam mathematica circa transformationem aequationum algebricarum*; ivi, infatti, si trova la riduzione a forma trinomia di qualunque equazione di quel grado, che, ritrovata dal Jerrard nel 1834, servì di base alle celebri ricerche di Hermite sull'argomento. La rarità e l'importanza di quel lavoro consigliarono il prof. Cajori a diffonderne la conoscenza mediante una traduzione inglese, che vide la luce, sotto il titolo *On the transformation of algebraic equations*, nel vol XXII del periodico *Semi-annual Bulletin of the Colorado College Observatory*.

***

Schizzo della Storia delle Matematiche in Belgio. È questo il titolo di un articolo pubblicato da P. Mansion nelle *Révue des questions scientifiques* (Gennaio 1907), nel quale sono rapidamente descritti i lavori fatti dai matematici belgi a partire dall'epoca di Stevino fino ai nostri giorni; con questa nuova pubblicazione il dotto autore porge un prezioso complemento a due ben noti articoli, da lui pubblicati nei vol. VI e X del *Bollettino* del Boncompagni.

***

Per l'unificazione delle Notazioni Vettoriali. È noto che, in seguito ad alcune proposte fatte dal prof. Prandtl al Congresso dei naturalisti tedeschi tenutosi a Cassel nell'autunno 1903, venne nominata una commissione incaricata di formulare un progetto di unificazione delle svariatissime notazioni in uso fra i cultori dell'analisi vettoriale; tale commissione non fece ancor noti i risultati de' propri studi; ma nel frattempo le proposte del Prandtl furono discusse dal Macfarlane e da Mehmke. Ora i Professori Burali Forlt e Marcolongo, nell'intento nobilissimo di facilitare ed affrettare l'avvento di un sistema unico, hanno iniziato nei *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* una serie di articoli destinati a raccogliere tutto il materiale storico, scientifico e pratico indispensabile per giungere ad un algoritmo unico, la scelta e formazione del quale verrà compiuta dal prossimo Congresso internazionale dei matematici. Del caldo appello da essi rivolto a tutti i colleghi d'interessarsi all'importante questione il *Bollettino* si fa di buon grado trasmissore, augurando che non rimanga inascoltato, e che venga eliminata una delle principali cagioni per cui il cal-

Digitized by Google

colo vettoriale si è diffuso con relativa lentezza ed è ancora accolto con una certa diffidenza.

***

NUOVO PERIODICO. Sotto il titolo di *Archives de Mathématiques pures et appliquées* i signori E. Weber e R. de Kelser hanno testè intrapresa a Liegi la pubblicazione di una nuova « Revue internationale trimestrielle » il cui programma è esposto sotto la seguente forma:

« La divisa della Rivista è il motto di Novalis SENZ'ENTUSIASMO NON ESISTE MATEMATICA. Tali parole, sulla soglia stessa degli « Archives », ricorderanno che qui viene adunata la messe e che in questi semplici fogli sopravvivrà forse il pensiero che, vibrante, fu vivo entro le fronti umane chine nella luce delle camere studiose. Essi diranno il fervore e l'entusiasmo del ricercatore nello sforzo in prò del patrimonio matematico. E questo patrimonio proviene dal fondo de' secoli, da quei tempi ove i pastori, i dolci pastori suonatori di liuto, leggevano nelle stelle la loro prima lezione sopra il Numero e la Forma. Certuni troveranno esagerato questo lirismo. Noi risponderemo loro che la Matematica è un'Arte e che qualunque Arte ha bisogno, per sorgere dall'ombra con la sua estetica, di venire illuminata da una fervida luce entusiastica ».

Ecco il sommario del N°. I: J. ANDRADE, L'étendue vectorielle. E. WEBER, Sur la conique pédale de deux points. G. LORIA, Sui deux classes d'enveloppes. T. HAYASHI. Sur une classe d'équations algébriquer. F. CHOMÉ, Recherche méthodique d'une section plane dans un polyédres quelconque et de l'intersection de deux polyédres quelconques. J. RICHARD, Sur les fondéments de la géométrie. Variétés.

***

ALTRI SCRITTI POSTUMI DI P. TANNERY. Uno si legge nella puntata di Aprile 1907 della *Revue du mois* e, tradotto in italiano, nel fascicolo di Agosto 1907 della *Rivista di fisica, matematica e scienze naturali*. Si tratta del Programma di un corso di storia delle scienze pel cosidetto insegnamento secondario « moderno », il quale presenta con interesse affatto speciale che la riforma dell'istruzione media va maturandosi passa tutti i paesi civili. L'altro (*Le manuel d'introduction aritmétique du philosophe Domnninos de Larissa*; Revue des études grecques, T. XIX, 1906), completa in più d'un punto importante alcuni ben noti studi del compianto erudito.

***

UN NUOVO PERIODICO DI MATEMATICA APPLICATA è l'*Internationales Archiv für Photogrammetrie*, che comincia col corrente anno le sue pubblicazioni, sotto la direzione del prof. E. Dolezal; il carattere internazionale di tale pubblicazione è dimostrato dal comitato di reda-

Digitized by Google

zione costituito da E. Deville (Canadà), S. Finsterwalder (Monaco), K. Fuchs (Pressburg), N. Herz (Vienna), Hohenner (Braunschweig), A. Hübl (Vienna), A. Klingatsch (Graz), W. Laska (Lemberg), P. Paganini (Firenze), K. Pulfrich (Jena), A. Ranza (Roma), J. Sacconey (Parigi), A. Schell (Vienna), F. Schiffner (Vienna), R. Thiele (Mosca) e F. Zorroja (Madrid). Editrice dell'*Archiv* è la Casa C. Fromme (Vienna) e l'abbonamento annuo costa 24 Corone.

***

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE. F. AMODEO. — *Uno sguardo allo sviluppo delle scienze matematiche nell'Evo antico.* Riassunto del Corso di storia delle matematiche tenuto all'Università di Napoli nell'anno 1905-06. *Giorn. di matematiche*, T. XLV, 1907.

A. FAVARO. *Regesto biografico galileiano. Dalla edizione nazionale delle opere.* Firenze. Barbera 1907. (È una nuova edizione, totalmente rifatta, della *Cronologia galileliana* apparsa nel 1892 fra gli Atti dell'Accademia di Padova; primo frutto dell'edizione nazionale delle opere di Galileo, sarà non indarno consultato da tutti coloro che avranno bisogno di conoscere qualche fatto o qualche data concernente quel grande o di verificarne l'esattezza).

A. FAVARO. — *Amici e corrispondenti di Galileo Galilei.* XXI. *Benedetto Castelli.* Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti, 1907. «(I dati generali biografici intorno al Castelli», dice esordendo l'A., «ci sono forniti da varie parti e con tanta sicurezza benchè ci è di qualche sconforto il dover cominciare dal dire, in opposizione a quanto si era fin qui fermamente creduto, non potersi affermare con tutta esattezza dove sia nato, nè il giorno della nascita nè quello della morte»).

G. JUNGE, *Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt?* Sonder abdruch aus den Novae Symbolae Joachimicae; Halle 1907. (Dallo studio approfondito di tutte le fonti tuttora esistenti, fatto coll'aiuto dei metodi offerti dalla filologia moderna, l'A. conclude che gl'irrazionali vennero scoperti, non da Pitagora, ma alcuni anni dopo la sua morte; e che un'uguale incertezza regna intorno alle scoperte del «teorema dell'ipotenusa» e dei due ultimi solidi regolari).

P. STAECKEL, *Eulers' Verdienste um die elementare Mathematik.* Zeitschr. f. Mathematik u. naturw. Unterr., Bd. XXXVIII, 1907. (Questa interessantissima conferenza tenuta nel «Mathematischer Verein», di Hannover per commemorare il sommo matematico svizzero, chiude con la seguente osservazione: «tutti gli alunni delle nostre scuole medie assorbono tanto dello spirito di Eulero, che sa-

Digitized by Google

rebbe un dovere di ricordare opportunamente nelle scuole il secondo centenario della sua nascita »).

P. STAECKEL, *Vier neue Briefe von Gauss.* Gottinger Nachrichten, 1907. (Nel presentare alla Società scientifica di Gottinga quattro nuove lettere da collocarsi nell'Archivio Gauss, l'A. nota che, in vista del volume X delle Opere di questo grande, nel quale verrà adunato tutto il materiale biografico, coloro che posseggono lettere od altri scritti che a lui si riferiscono dovebbero inviarne almeno copia alla soprain-tendenza di detto Archivio. Al soddisfacimento di tale legittimo desiderio il *Bollettino* contribuisce, con le presenti linee, nella misura delle proprie forze!)

***

LO SVILUPPO DELLA PROSPETTIVA PITTORICA DURANTE IL RINASCIMENTO ITALIANO è il tema svolto dal prof. Reinhold-Müller nell'assumere (2 novembre 1906) il rettorato del Politecnico di Braunschweig. Il dotto oratore, dopo un cenno sopra Giotto, fece rilevare i meriti di F. Brunelleschi, il fondatore della prospettiva geometrica, e quelli di L. B. Alberti e Pier dei Franceschi, che lasciarono memoria scritta dei loro metodi di prospettiva. Col 1600 fa il suo ingresso il *punto di fuga*, che doveva portare un radicale mutamento nella dottrina in questione; col 1600 l'oratore pose fine al suo dire.

***

TEMI DI MATEMATICA PROPOSTI DALL'ACCADEMIA DEL BELGIO PER L'ANNO 1908.

I. Apportare un contributo importante allo studio dell'equazione differenziale $X\,dx + Y\,dy = 0$, ove X e Y rappresentano date funzioni quadratiche delle variabili x y. Premio fr. 800.

II. Esporre e completare le ricerche sul calcolo delle variazioni fatte a partire dal 1850. Premio fr. 600.

Le memorie devono essere inviate anonime alla Segreteria di quell'Accademia prima del 1° agosto 1908. Esse dovranno essere scritte in francese od in fiammingo.

***

UNA NUOVA BIOGRAFIA DI SALMON, dovuta alla penna di W. Fiedler, forma la prefazione della VII ed. della traduzione tedesca delle *Sezioni coniche* di quel celebre geometra; avendo l'opera matematica del Salmon dato occasione ad un profondo lavoro del Nöther (cfr. questo *Bollettino* VIII, 1905, pag. 127), il Fiedler giudicò conveniente di ricordarne soltanto le più spiccate caratteristiche, diffondendosi invece a descrivere l'uomo ed il teologo; così, invece di un duplicato, egli ci ha dato un prezioso complemento allo scritto del Nöther.

Digitized by Google

***

L'ULTIMO TEOREMA DI FERMAT. — Il dott. Paul Wolfskehl, morto lo scorso anno a Darmstadt, destinò per testamento la somma di centomila marchi a colui che, dietro parere della Società delle Scienze di Gottinga, sarà riuscito a dimostrare l'impossibilità in numeri interi, per $n > 2$, della equazione $x^n + y^n = z^n$. Sino al giorno del conferimento del premio, gl'interessi di quel capitale verranno erogati a scopi matematici.

***

TEMA PROPOSTO DALL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI MADRID. — « Esposizione chiara e semplice del calcolo delle probabilità ». Premio 1500 pesetas; scadenza 31 dicembre 1909. Le memorie dei concorrenti devono essere scritte in castigliano od in latino e presentate senza nome d'autore col sistema generalmente in uso.

***

UNO SGUARDO AL NUOVO INDIRIZZO LOGICO MATEMATICO DELLE SCIENZE DEDUTTIVE. — È questo il titolo del discorso letto dal prof. M. Pieri inaugurandosi l'anno accademico 1906-07 nella R. Università di Catania. Crediamo far cosa grata ai nostri lettori riferendone l'epilogo:

« Al primato del sentimento e della ragione pratica, al primato dell'azione e del costume, la logica matematica oppone il primato della *ragione speculativa*, la filosofia delle idee chiare e distinte e dell'evidenza razionale; che sottopone tutte le opinioni al dubbio metodico per adattarlo al livello della ragione.

« Gli spiriti, le forme e gli abiti logistici faranno argine al traboccare di alcune correnti ideali, come lo psicologismo, il moralismo, il sociologismo, che della logica sconoscono la vera natura ed fini.

« Nè sarà forse improvvido consiglio ristorare alquanto il prestigio e l'uffizio della ragione, di fronte alla vantata universalità di codesti sistemi; ciascuno dei quali aspira per proprio conto al dominio quasi assoluto del moderno pensiero filosofico.

« E prima di condannare gli arnesi del razionalismo, come roba invecchiata ed inutile, non sarà male aspettare che sia fatta e compiuta l'indagine di tutti i principii razionali; e misurato il potere della ragione mercè l'inventario di tutte le sue ricchezze e il bilancio di tutte le sue operazioni. All'ardua impresa si provò il genio immortale di Emmanuel Kant, cercando di edificar la logica trascendente sopra la logica formale della traduzione scolastica: se non che questa, già debole e fiacca ai suoi tempi, pare oggi troppo insufficiente allo scopo; però la critica della ragione, sarà tuttavia da istituire sul fondamento d'una logica meglio adeguata allo stato attuale delle scienze.

« Nè perciò si dovrà esagerare e fraintendere l'uffizio della logica

Digitized by Google

formale; che non si arroga giá di essere la scienza dello spirito, nè presume occupare e assorbire, tutta quanta la filosofia speculativa. Qualsivoglia dottrina logica presuppone delle nozioni e dei postulati che la logica stessa non è in grado di giustificare; alla *Critica* toccherà il farne la stima. Ma noi teniamo per fermo, che la critica non possa intendere con efficacia a quest'opera, se non quando la logica abbia già assolto (almeno in gran parte) il proprio compito di scoprire, denudare e circoscrivere i dati primordiali della ragione da cui tutto il resto procede: e che, prima di aver compiuta l'enumerazione di tutti i principii analitici, non si abbia il diritto di cercare fuori della ragione un sostegno ai principii così detti « sintetici ». La logica formale sarà dunque per noi la necessaria prefazione, la propedeutica d'ogni filosofia veramente scientifica e critica. Se la ragione ha dei confini, a lei sola spetterà di segnarli: nessun'altra autorità deve imporli o prestabilirli ad arbitrio. Voler filosofare fuor della ragione, o contro la ragione, è come pretender di volar più su dell'atmosfera, e di saltar fuori dell'ombra propria ».

***

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK. — Il *XXIV Heft* di questa importante raccolta contiene IOANNIS VERNERI *de triangulis sphaericis libri quatuor, de meteoroscopiis libri sex, cum Proemi* GEORGI IOACHIMI RHETICI. Ne venne sinora pubblicata la prima parte, la quale porta il titolo *De triangulis sphaericis, herausgegeben von* A.A. BJÖRNBO, *mit 211 Figuren im Text* (Leipzig 1907, Mk. 8). Essa contiene la fedele riproduzione di un prezioso ms. esistente nella Biblioteca vaticana, ove porta la segnatura Cod. Regin. 1259, onde fa parte di una celebre raccolta dovuta alla Regina Cristina di Svezia. La pubblicazione del relativo lavoro del Werner era stata progettata, anzi cominciata dal Retico, come prova il frontispizio e la prefazione, di cui esiste un esemplare a stampa nella biblioteca universitaria di Cracovia, riprodotto in fac-simile in testa del volume che annunciamo. La pubblicazione venne probabilmente interrotta perchè il Retico avvertì nel lavoro del Werner quelle imperfezioni che appunto sconsigliarono questi di pubblicar la sua opera e non si trovano nel celebre *Opus Palatinum de triangulis*. la grande opera postuma del Retico. Malgrado i difetti che hanno, i quattro libri del Werner (ove sono discussi i varii casi che può presentare un triangolo sferico e vengono insegnati i metodi per risolverlo in ogni caso), avrebbero procacciata gran fama all'autore; oggi la pubblicazione di essi, non solo vale a delineare con più precisione la figura di scienziato, ma abilita a completare in un punto importante la storia della trigonometria; onde per questa sua nuova fatica il Björnbo merita il plauso di tutti i cultori della storia delle matematiche.

Digitized by Google

***

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE BERICHTE AUS UNGARN. — I vol. XXI (1903) e XXII (1904) di questa bella pubblicazione portano entrambi la data 1907 (Leipzig, Teubner) e contengono ciascuno un lavoro destinato ad attrarre l'attenzione de' nostri lettori; eccone i titoli: A. Kerndl, ***Beiträge zur graphischen Theorie der Gelenkträger mit elastisch unbestimmten Auflagendrücken;*** G. Rados, ***Beitrag zur Theorie der regulären Vielecken.*** Quest'ultimo offre un'interessante applicazione alla geometria della teoria dei numeri; fra le proposizioni stabilite citiamo come esempio la seguente: Se, al solito, φ (n) indica la nota funzione numerica di Gauss, se inoltre J_n designa la somma delle aree dei $\frac{\varphi(n)}{2}$ n-goni regolari inscritti in un cerchio e C_n la somma degli analoghi n-goni circoscritti al medesimo cerchio, sussiste la relazione

$$\frac{J_n}{C_n} = \frac{\varphi_n + \varepsilon_n}{4}$$

ove ε_n rappresenta un numero che é nullo quando n è divisibile per un quadrato, e che, quando tutti i fattori di n sono fra loro differenti vale +1 secondochè il numero di tali fautori è pari o dispari ».

***

ANNUAIRE POUR L'AN 1908 PUBLIÉ PAR LE BUREAU DES LONGITUDES. Avec des notices scientifiques. Paris Gauthier Villars. [Prezzo fr. 1,50].

Oltre alle consuete notizie numerose ed esatte, il presente volume della celebre collezione contiene i due seguenti articoli originali: G. Bigourdan: ***Les distances des astres et particulièrement des étoiles fixes***; F. Guyou: ***L'école d'astronomie pratique de l'Observatoire de Montsouris.*** Inoltre le necrologie di M. Loewy e C. Trépied scritte risp. da H. Poincaré e M. Loewy. Finalmente un'accurata relazione sopra i Congressi tenuti a St. Louis, Oxford e Meudon dall' « Union internationale pour la cooperation dans les recherches solaires », scritta da H. Deslandres.

***

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLE SCIENZE NATURALI. E. Wiedemann, Beiträge, zur Geschiche der Naturwissenchaften. XII. Ueber Lampen und Uhren. XIII. Ueber eine Schrift von Ibn al Haitam « Ueber die Beschaffenheit der Schatten ». (Sitzungsber. der phys. mediz. Sozietat Erlangen, T. 39, 1907).

Zur Geschichte des Kompasses bei den Arabern. (Verhandl. der Deutschen physikalischen. Gesellschaft IX Jahrg. 1907). Ueber das al Bêrûnische Gefäss zur speciphischen Gewichtsbestimmung. (Id., Jahrg. 1908).

Digitized by Google

*
* *

INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR PROMOTING THE STUDY OF QUATERNIONS AND ALLIED SYSTEMS OF MATHEMATICS. -- Dal *Rapporto annuale* pubblicato nel marzo 1908 si desume che tale sodalizio conta 69 membri esso fu crudelmente colpito dalla morte del prof. V. Schlegel e più ancora da quella di C. J. Joly (1864-1908) che dal 1901 occupava la carica di presidente; il successore, prof. Macfarlane, ne dà una toccante biografia, piena di notizie interessanti relative al defunto ed anche a Hamilton. Lo stesso *Rapporto annuale* contiene un supplemento alla «Bibliografia dei quaternioni ecc.» compilato per cura dell'«Association», il quale comprende 356 articoli; numero estremamente considerevole e che stupirà parecchi dei nostri lettori; per renderne ragione bisogna tener conto dei criteri di scelta assai larghi che vennero adottati e che indubbiamente troveranno non pochi e gagliardi critici.

*
* *

TEMA POSTO A CONCORSO DALLA SOCIETÀ JABLONOWSKI PER L'A. 1910. -- La maggior parte dei problemi d'elettrostatica si possono ridurre alla determinazione della distribuzione delle masse di Green; per la teoria d'elettrostatica, come pure per tutta la teoria del potenziale, tale distribuzione è della massima importanza. Ricerche recentemente pubblicate (Ber. der k. Sachs. Ges. der Wiss., 1906, pag. 483-558) hanno posto fuor di dubbio che nella teoria del potenziale logaritmico per qualunque curva chiusa le due distribuzioni di Green corrispondenti agli spazi interno ed esterno si possono ridurre ad una distribuzione unica, cioè alla così detta «distribuzione fondamentale», e che lo stesso accade nella teoria del potenziale newtoniano per qualsivoglia superficie chiusa. Tuttavia siffatte ricerche lasciano ancor molto a desiderare. Epperò la Società propone il seguente problema:

«Fare un lavoro dal quale quella teoria della distribuzione fon-«damentale venga notevolmente perfezionata riguardo alla chiarezza «ed al rigore oppure riguardo all'estensione e completezza».

Premio Mk. 1500.

*
* *

UN'ESPOSIZIONE PERMANENTE DI MODELLI DI MATEMATICA trovasi a Monaco nella Sala N. XVII del «Deutsches Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaften und Technik». Ivi è a grandi linee indicato lo sviluppo storico della matematica col mezzo di tavole ove sono notate le principali date della storia della matematica e di ritratti dei più celebri matematici. In particolare è indicato lo svolgimento successivo dei metodi di calcolo aritmetico nonchè quello dei procedimenti caratteristici del calcolo infinitesimale, col mezzo delle forme successivamente assunte dalle macchine calcolatrici e dai

Digitized by Google

planimetiri; d'altronde una ricca raccolta di modelli di geometrica porge una chiara idea dell'evoluzione della ricerca geometrica. Tutta l'esposizione è divisa nelle cinque Sezioni seguenti: *A*) Sviluppo del calcolo pratico e della macchina calcolatrice. *B*) Rappresentazione delle più importanti figure geometriche. *C*) Sviluppo della teoria della prospettiva e delle applicazioni di questa, *D*) Planimetri. *E*) Costruzione di curve geometriche. Intimamente connessa a tale esposizione è una somigliante relativa alla Cinematica.

Maggiori particolari al riguardo si trovano nel magnifico catalogo illustrato (*Deutsches Museum. Führer durch die Sammlungen*) di recente pubblicato dalla Casa Teubner, sotto la direzione e con la collaborazione del Prof. W. von Dyck, e posto in vendita al tenue prezzo di 1 Mk.

***

Nuovo Catalogo di una grande Casa Editrice. In occasione del IV Congresso internazionale dei Matematici (ma sgraziatamente troppo tardi ser essere presentato a chi v'intervenne!) la Casa editrice B. G. Teubner di Lipsia-Berlino ha pubblicata una nuova edizione totalmente rifatta del Catalogo che essa diede alla luce in occasione del precedente Congresso. Ivi, non soltanto trovasi riprodotto il ben noto « Diario matematico » redatto dal Prof. F. Müller, non solo vennero aggiunti i ritratti di alcuni grandi scienzati (G. Galilei. H. Bruns, M. Cantor, F. R. Helmert, F. Klein, F. Kohlrausch, K. Krapelin, C. Neumann, A. Penck, A. Wüllmer), ma fu aggiunta una Introduzione nella quale è reso conto circostanziato dei frutti che diede la meravigliosa attività spiegata da quella celebre Casa. Tale Introduzione, porgendo un quadro particolareggiato delle varie fasi che attraversò la produzione matematica, non solo tedesca, in quest'ultimo mezzo secolo, verrà utilmente consultata dagli storici futuri, onde eleva l'attuale pubblicazione dal modesto livello d'uno strumento commerciale a quello di documento d'indiscutibile valore.

***

Biblioteca scolastica. — L. Ashcroft, *Geometrical exercises arranged for classes wich do not use a text-book in geometry*. In four gradueted parts. London, E. Arnold, 1907.

H. C. Playne and. R. G. Fawdry. *Practical trigonometry*. London, E. Arnold 1906. [I. Misura di angoli. - II. Funzioni trigonometriche. - III. Uso delle tavole a quattro o decimali per le funzioni naturali. - IV. Funzioni di angoli superiori ad un retto. - Relazioni fra i lati e gli angoli di un triangolo. - VI. Projezioni e formole per angoli composti. - VII. Logaritmi. - VIII. Risoluzione di triangoli. - IX. Misura circolare degli angoli. - X. Angoli non situati nel medesimo piano; operazioni sul terreno].

Digitized by Google

G. BURALI-FORTI, *Lezioni di aritmetica pratica con 210 esercizi, 360 problemi, 17 tavole. ad uso delle scuole secondarie inferiori* (Ginnasio Scuola tecnica - Scuola complementare). IV ed., Torino, Petrini, 1907.

F. AMODEO, *Brevi cenni sulle sezioni coniche considerate come sezioni di un cono circolare retto.* III ediz. Napoli, L. Pierro, 1907, 8°, pag. 28 [Prezzo L. 1].

W. HARTAS JACKSON, *Elementary solid geometry including the mensuration of the simpler solids.* With 400 examples. London, E. Arnold, 1907, 8°, p. XII + 160. [Prezzo 2 sh. 6 d.].

J. WELLESLEY RUSSELL, *A sequel to elementary geometry, with numerous examples.* 8°, p. VII + 192. Oxford, Clarendon Press. Prezzo 6 sh. (Come segno dei tempi va osservato che l'autore usa liberamente dell'algebra quando ciò semplifica le soluzioni o le dimostrazioni).

Nozioni di geometria intuitiva ad uso delle Scuole complementari di G. VERONESE con la collaborazione di P. GAZZANIGA. Verona-Padova, Drucker, 1908. Prezzo L. 1,50.

P. TREUTLEIN, *Mathematische Aufgaben aus den Reifeprüfungen der Badischen Schulen.* Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1907.

(Nulla essendo più adatto ad indicare l'indirizzo ed il livello dell'insegnamento matematico in un dato paese di quanto lo siano i temi dei relativi esercizi, crediamo opportuno indicare compendiosamente gli argomenti trattati in questa ricchissima raccolta di esercizi:

I Parte: *Aritmetica ed algebra. Fondamenti dell'aritmetica.* Equazioni di 1° 2° 3° grado e di gradi superiori. Equazioni indeterminate. Equazioni esponenziali.

Serie aritmetiche di primo ordine. Serie geometriche. Combinazione di serie aritmetiche e geometriche. Serie aritmetiche superiori. Calcoli di rendite e d'interessi. Frazioni continue. Analisi combinatoria. Probabilità. Teorema del binomio. Numeri complessi. Serie. Massimi e minimi. Espressioni indeterminate.

II Parte: *Geometria* A. *Geometria piana.* Triangoli, quadrangoli, poligoni regolari. Circolo e circoli. Geometria algebrica. Forme armoniche e relazioni projettive. Le coniche in generale. Parabola, ellisse, iperbola. B. *Goniometria ed equazioni goniometriche.* C. *Trigonometria piana.* Il triangolo rettangolo. Il triangolo acutangolo. Il quadrangolo. Calcoli relativi al cerchio. Determinazioni di distanze ed altezze. D. *Trigonometria sferica.* Problemi teorici, Geografia matematica. Problemi steremetrici (cristallografici) Problemi d'astronomia. E. *Stereometria.* Prisma, piramide, cilindro, cono, tronco di piramide o di cono, ecc. I poliedri regolari. La sfera e le sue parti. F. *Geometria analitica.* Retta, cerchio, parabola, ellisse, iperbola).

Bestonzo Pietro, Gerente.

Ciriè - Stabilimento Tipografico G. CAPELLA - Ciriè

Digitized by Google

INDICE DEI NOMI

Abel 118.
Alberti L. B. 122.
Al-Beruni 125.
d'Alembert 24, 67, 112, 113.
Alfani 62.
Allacci 62.
Amaldi 58, 79, 93, 95.
de Amicis 112.
Amodeo 63, 121, 128.
Andrade 120.
Andrae 86.
Apiano 71.
Appell 51.
Archimede 66.
Aristotele 33, 66, 69, 70 *n*.
Asheroft 127.
Auric 59.

Baliani 66.
Barbera 62
Basheroft 116.
Battaglini 63, 107.
Bauer 64.
Beltrami 107, 109.
Benedict 29.
Bernoulli 72, *n*.
Berry 79, 80.
Bertini 29, 37, 51, 38 *n*.
Berzolari 51.
Bessel 85, 99.
Bézout 49.
Bigourdan 125.
Billous 14.
Binet 51.
Binoux 59.
Bittner 31.
Bjornbö 121.
Blasche 52, 54.
Böhmenlander 32.
Boltzmann 34, 37.
Boncompagni 107.
Bopp 63.
Bordin 59.
Bortolotti 61, 62.
Bosmans 63.
Bossche 61.
Bouquet de la Grye, 56.
Bravais 86.
Bricard 29.
Bring 105, 109.
Brioschi 62, 93, 105, 107, 108, 110, 114.
Brogger 118.
Brunelleschi 122.
Bruni 30.
Bruns 127.
Bubendey 118.
Burali-Forti 101, 119.

Cajori 119.
Canavari 29.
Cantor G. 20, 26.
Cantor M. 127.
Caporali 49.
Cardano 70.
Carmichael 13.
Carvallo 13.
Cartesio v. Descartes.
Casorati 24.
Cassinis 14, 16.
Castelli 121.
Castelnuovo 5, 45. 48.
Cauchy 12, 19, 106.
Cavalieri 78.
Cavalli 114.
Cayley 44, 50, 77, 89, 106.
Cesàro 14, 107.
de Cesare 107 *n*.
Chandler 103.
Chapel 116.
Chappuis 54.
Charbonnier 111, 112 *n*.
Chasles 59.
Chelini 108, 109.
Chomé 120.
Clebsch 1, 6, 47.
Clifford 42.
Conti 31.
Couturat 30.
Crasso 62.
Cremona 48, 107.
Cristina di Svezia 124.
Czuber 54, 95.

Darboux 58, 106.
Dedekind 58.
Dehn 79
Demoulins 59.
Descartes 28, 32, 33.
Deslandres 56, 125.
Deville 121.
Diels 30.
Dini 29.
Dionisi 20.
Dirichlet 58, 93, 156.
Dolezal 120.
Dolfin 62.
Domnino 120.
Doria 114.
Drude 12, 13, 13.
Duhem 65, 72, 118.
Dureli 31.
v. Dyck. 32, 127.

Ebner 88, 89.
Edwards 31.
Ehlers 13.
Engel 39 *n*.
Enriques 5, 30, 33, 39.
Erba 112.
Erone 67, 67 *n*. 68, 69, 70 *n*.
Euclide 53.
Eulero 24, 98, 118, 121.

Fagnano 104, 105, 113.
Favaro 62, 66, 121.
Fawdry 127.
Fermat 123.
Ferraris 23, 24.
Fiedler 91, 122.
Fields 45.
Finsterwalder 32, 121.
Flechter 12.
Fock 31.
Forsyth 93.
Foucault 108, 113.
Fourier 106.
de Franceschi 122.
Francoeur 59.
Fredhohm 102, 106.
Fresnel 122.
Fricker 21.
Fromme 121.
Fuchs K. 121.
Fuchs L. 2.

Gaetschenberger 32.
Galileo 34, 62, 67, 72, 80, 121.
Galois 22, 105.
Gambioli 79, 80.
Garbasso 33.
Gauss 23, 24, 32, 82, 83, 84. 85, 86, 89, 90, 117, 122, 125,

Digitized by Google

Gazzaniga 128.
Gebbia 109.
Gemma Frisio 63.
Genocchi 112, 114.
Gerono 113.
Giardina 30.
Gilbert 113.
Giotto 122.
Ghika 64.
G. L. (vedi Loria)
Glaisher 110, 114, 115.
Gleich 23, 25.
Graf 63.
Grassmann 38, 39 *n.* 118.
Goth 15.
Guichard 59.
Gundelfinger 32.
Gustavo Adolfo 62.
Gutzmer 19, 20.
Guyou 125.

Hagen 82.
Halphén 42, 44, 50, 93.
Hamilton 24, 110, 112, 126.
Hankel 118.
Hansen 85.
Harnack 76.
Hauswaldt 13.
Haüy 15.
Hayashi 120.
Helmert 80, 88, 127.
Hensel 43.
Herigone 29.
Hermite 105, 106, 109, 119.
Herschel 80.
Hertz 37.
Herz 121.
Hesse 117.
Hessel 15.
Hilbert 45, 55 *n.* 73, 73 *n.* 76, 77, 78, 106.
Hindebrandt 32.
Hinneberge 32.
Hohenner 121.
Holst 118.

Hudson 22, 23.
Hübl 121.

Ibn al Haitan 63, 125.

Jablonowski 126.
Jacobi 103, 104, 105, 106, 109, 110, 114, 117.
Jackson 128.
Jacobsthal 76, 79.
Jerrard 103, 119.
Joly 126.
Jordan 26, 27.
Jona 30.
Junze 121.

Kant 123.
de Kelser 120
Keplero 51, 57, 80.
Kerndl 125.
Klein 21, 22, 38 n. 42, 127.
Klingatsch 121.
Klussmann 31.
Kötter E. 32.
Königsberger 13.
Kohlrausch 127.
Kowalewski 102.
Krapelin 127.
Kronecker 41, 43, 58, 106.
Kummer 22, 23.

Lagrange 34, 114.
Laguerre 104.
Landen 104.
Langren 62.
Lanner 56 *n.*
Laplace 96.
Laska 121.
Laurent H. 54, 55.
Laurent P. 116.
Leccorte 59.
Legendre 87.
Leibnis 33.
Lemnes 102.
Lemoine 59.
Leone XII 107 *n.*
Leoewy 125.
Lesser 56, 57.
Levi 55 *n.* 64, 73-76.
Lewis 15.
Lie 93, 109, 117.
Liebisch 12, 14.
Liouville 97, 98.
Lipschitz 106.
Listing 24.
Loria 16, 23, 55, 57, 80, 89, 90, 93, 120.
Lüroth 47,
del Lungo 62.

Macfarlane.
Maclaurin 57.
Maillet 97-98.
Malfatti 106.
Mallard 13.
Malus 24.
Mandart 56.
Mannheim 59, 60.
Mansion 119.
Marchesini 62.
Marcolongo 25, 51, 119.
Marino 62.
Maxwell 12, 24, 117.
Mayer 117.
Mayewski 116.
de' Medici 62.
Mehmke 119.
Miranzio 62.
Millosevich 79.
Mittag-Leffler 96.
Möbius 24.
Monge 59, 91, 91 *n.*
de Montessus 59.
Müller 96.

Nansen 118.
Narducci 114.
Naumann 15.
Nemorario 65, 70, 71
Neumann C. 24, 127.
Neumann F. 117.
Newton 28, 29, 36, 80.
Niccoletti 29.
Nielsen 98, 99
Nix 67.
Noether 1, 6, 45, 49, 122.
Novalis 120.

Ortu Carboni 31, 99, 101.
Osgood 96.

Paciuolo 29.
Padé 59.
Padeletti 108.
Paganini 14, 16.
Panebianco 21.
Paoli 62.
Pappo 67, 68, 69,
Pascal 103.
Pasch 78.
Peano 2, 35, 55 *n.*
Pelacani 70.
Peletier 63.
Peuck 127.
Perry 31.
Peschka 91.
Petit d'Ormoy 53.
Petzwal 24.
del Pezzo 48.
Pfaff 104.
Picard 1, 10, 48, 97, 117.
Pieri 55 *n.* 107, 123.
Pincherle 57-58.
Pitagora 121.
Pizzetti 88.
Plana 90.
Platone 33.
Playne 127.
Pockels 11, 14.
Pocklington 13.
Pohlke 92.
Poincaré 104, 12, 35, 97, 118. 125.
Poinsot 54, 108, 109.
Poisson 97-109.
Poncelet 59, 104, 104 *n.*
Predella 41.
Prandtl 117.
Pulfrich 121.
Puteano 62.

Rados 125.
Ranza 12.
Rebco 124.
Riccati 114.
Richard 120.
Ricci 111, 111 *n.*
Riemann 2, 6, 10 *n.* 19, 44, 50, 73, 96, 104 *n.* 106.
Rignano 30.
Roberts 89.
Rocca 62.
Rhor 32.
Rohn 24.
Rolle 28.
Ross 31.
de' Rossi 62.
Ruffini 61, 62.
Runge 91.
Russell 128.

Sacconey 121.
Salmon 60, 122.
Sang 114.

Digitized by Google

Schaefer 117.
Schell 121.
Schiffner 121.
Schilling 34, 89.
Schlegel 126.
Schlömilch 92.
Schmidt E. 106.
Schmidt W. 67 n.
Schoenflies 25.
Schols 86.
Schreiber 88.
Schubert 44, 60.
Schwarz 22, 92.
Segre 30 n. 39, 40, 41, 43, 48, 49, 50.
Severi 10, 46, 48.
Severini 20.
Siacci B. 107.
Siacci F. 107, 116.
Siacci M. 107.
Simart 1, 10.
Simon 118.
Siri 62
Smith 29.
Stäckel 93, 121, 122.
Staudt 37.
Steiner 48.
Stevino 73.
St. Robert 113, 114, 116.
Stromer 118.
Struve 15, 16.
St. Vincentio 63.
Sylow 118.
Sylvester 109.

Tannery J. 22, 28, 118.
Tanney P. 120.
Tartaglia 70, 71.
Taylor 57, 58, 102, 103.
Terquem 113.
Thiele 84, 87, 121.
Thue 118.
Torricelli 63, 72, n.
Tortolini 107.
Treutlein 128.
Treves 80.
Troepfke 29.

Vaes 61.
Vailati 33.
Vassura 63.
Veblen 103.
Venturi 62.
Veronese 37, 47, 47 n. 43, 50, 128.
Vigeland 118.
da Vinci 65, 70.
Viola 141
Vitali 74.
Vivanti 19, 22, 27, 95, 96, 97, 98, 99.
Viviani 62.
Voigt 11, 12, 13, 14.
Volpicelli 107.
Volterra 106, 101, 102.
Voss 32, 65, 65, 72.

Wagner 117.
Wallerant
Wallis 72 n.
Walter 119.
Weber E. 120.
Weber H. 73, 76, 79.
Weddle 23 n.
Weder 13.
Weierstrass 19, 41, 42, 58, 73, 105, 114.
Wellstein 76, 79.
Werner 124.
Whewell 118, 119.
Whitaker 110, 110 n.
Wiedemann 63, 125.
Wilczynski, 93 95.
Wolf 79.
Wolfskehl 123.
Wüllner 127.
Wulff 13.

Young G. C. 25. 27.
Young W. H. 25, 27.

Zanbodski 116.
Zeuthen 50, 60, 77.
Zorroja 121.

Digitized by Google

Digitized by Google

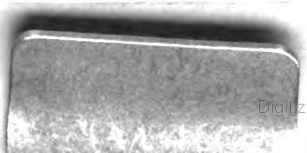
Digitized by Google

Digitized by Google

366167

QA
1
.B7
V.10-11

Sci



Digitized by Google

UNIVERSITY OF CHICAGO
63 387 008